数学小丛书

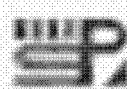
11

等周问题

蔡宗熹

π

i



科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书

1. 从杨辉三角谈起
2. 对 称
3. 从祖冲之的圆周率谈起
4. 力学在几何中的一些应用
5. 平 均
6. 格点和面积
7. 一笔画和邮递路线问题
8. 从刘徽割圆谈起
9. 几种类型的极值问题
10. 从孙子的"神奇妙算"谈起
11. 等周问题
12. 多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类
13. 复数与几何
14. 单位分数
15. 数学归纳法
16. 谈谈与蜂房结构有关的数学问题
17. 祖冲之算π之谜
18. 费马猜想

ISBN 7-03-009423-9



ISBN 7-03-009423-9/O·1399

全套书定价：99.00 元(共18册)

数学小丛书 11

等 周 问 题

蔡宗熹

科学出版社

2002

内 容 简 介

等周问题的典型例子之一是“周长相等的所有封闭平面曲线中，怎么样的曲线所围成的面积最大?”这本小册子主要是介绍它的初等解法及一系列有趣的应用．念过平面几何及三角的读者完全能看懂它．

本册先从简单的三角形谈起，接着论述：四边长度给定的一切四边形中，内接于圆的四边形具有最大的面积；周界长度给定的所有 n 边形中，正 n 边形具有最大的面积．进而给出了上述等周问题解答的两个证明和海伦公式的推广．最后证明了一切体积相同的立体中，球体具有最小的表面积．

图书在版编目(CIP)数据

等周问题/蔡宗熹．—北京：科学出版社，2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ．等…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．等周问题-普及读物
Ⅳ．O176．2-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010496 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2002 年 5 月第一版　开本：787×960　1/32
2002 年 5 月第一次印刷　印张：3 1/8　插页：1
印数：1—5 000　字数：45 000

全套书定价：99.00 元(共 18 册)

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

前　　言

等周问题，就是要在周长条件等同的所有区域中，找出面积最大的区域．所以等周问题属于极值问题范畴．

等周问题是一个古老的问题，同时又是一个有着广泛应用的，并在不断发展的问题．

学习方法是多种多样的，可以先看本书后记，在了解了本书的主要精神之后，再从头来认真阅读正文，领会“对称性”和“反射法”．

1 自然现象之谜

你小时候吹过肥皂泡吗？肥皂泡像无数五色缤纷的小球在空中飞舞着，多有趣！可你是否想过：为什么吹出来的肥皂泡总是一个个的圆球？你从来没有见到吹出像蕃茄、辣椒那样形状的肥皂泡吧！

也许你还遇见过下列这些现象：

假如你一不小心，打破了一支水银温度计，水银落到桌面上，你将看见许多银色的珍珠在桌面上滚动着.

如果你参观过机械工厂的翻砂车间，翻砂时溢出来的铁水凝成许多球形的弹子.

要是你生长在农村，当你大清早绕过荷塘时，你会看到在荷叶的中心露水聚成一个“水银球”，晶莹欲滴.

…………

对于这些自然现象，你也许会立即用物理知识加以解释，因为中学物理书里告诉我们：

具有最大的面积.这一类型的数学问题统称为**等周问题**.前面提出的就是等周问题的几个特例,它们的正确性当然有待于用严格的数学方法来加以证明.除上面提出的几个特殊的等周问题外,还有不少著名的等周问题.高等数学里关于这类问题已经有了非常丰富的理论.这本小册子的主要任务是用中学平面几何和平面三角的方法来讨论某些简单的等周问题.

具有最大的面积.这一类型的数学问题统称为**等周问题**.前面提出的就是等周问题的几个特例,它们的正确性当然有待于用严格的数学方法来加以证明.除上面提出的几个特殊的等周问题外,还有不少著名的等周问题.高等数学里关于这类问题已经有了非常丰富的理论.这本小册子的主要任务是用中学平面几何和平面三角的方法来讨论某些简单的等周问题.

具有最大的面积.这一类型的数学问题统称为**等周问题**.前面提出的就是等周问题的几个特例,它们的正确性当然有待于用严格的数学方法来加以证明.除上面提出的几个特殊的等周问题外,还有不少著名的等周问题.高等数学里关于这类问题已经有了非常丰富的理论.这本小册子的主要任务是用中学平面几何和平面三角的方法来讨论某些简单的等周问题.

2 几个简单的引理

我们从最简单的关于三角形的几个等周问题谈起.

先考虑这样一个问题:在两边长度给定的所有三角形中,怎样的三角形面积最大?任取长度给定的一边 CA 为底,其对应的高将随着两给定边 CA、CB 的夹角 θ 而改变(图 3).从图上可以看出,开始时面积随着 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的增大而增大;但当 θ 增大到了 $\frac{\pi}{2}$ 以后,面积却随着 $\theta\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)$ 的增大反而减小.从这个变化

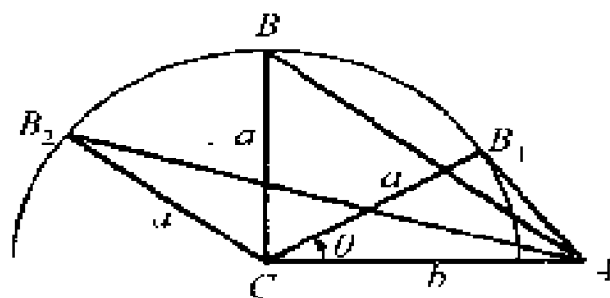


图 3

过程可以导出：

引理 1 两边长度给定的所有三角形中，以给定的两边相互垂直时的三角形的面积最大.

证明 设两给定边的长度为 a、b，夹角为 θ（图 3）. 此时，三角形面积 S 的表达式是

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，正弦函数具有最大值. 因此，三角形面积也就具有最大值.

下面我们再考虑：在底边及顶角给定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大？在底边及另外两侧边之和给定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大？这些简单的等周问题在往后的讨论中起着重要的作用.

引理 2 在底边及顶角给定的所有三角形中，以等腰三角形的面积最大.

证明 以给定的底边 AB 为弦，做圆弧 $\overset{\frown}{BCA}$，使其所张的圆周角等于给定的顶角 $\angle BCA$（图 4）. 由顶点 C 到底边 AB 引垂线 CD，三角形的面积等于 $\frac{1}{2}AB \cdot CD$. 由于 AB 是给定的，故当 CD 取最大值时，三角形的面积亦取最大值. 易知，当 C 点位于圆弧 $\overset{\frown}{BCA}$ 的中点

时，高 CD 具有最大值，因而 $\triangle ABC$ 的面积亦最大. 而此时，显然有 $BC = AC$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

为了使用方便起见，我们把引理二表成另一种形式：

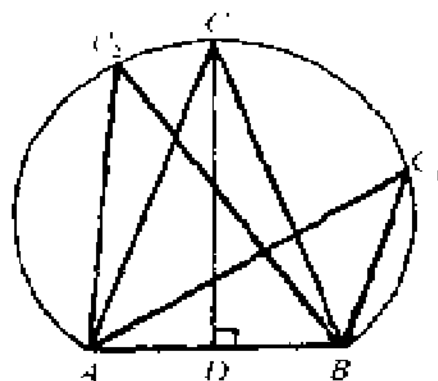


图 4

引理 2′ 以圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弦 AB 为底，顶点 C 在圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的所有三角形中，当顶点 C 位于圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，三角形的面积最大.

引理 3 在底边及两侧边的长度之和分别给定的所有三角形中，以等腰三角形的面积最大.

证明 作等腰三角形 ABC 和不等腰三角形 ABC'，其公共底边 AB 等于定长，C 与 C' 在 AB 的同侧，且 $AC + BC = AC' + BC'$ 亦为定长（图 5）. 容易看出 $\triangle ABC'$ 的顶点 C' 不可能落在 $\angle BCA$ 或其对顶角内，否则将有

$$AC' + BC' < AC + BC$$

或

$$AC' + BC' > AC + BC,$$

这是不允许的. 因此，C' 只能落在同 $\angle BCA$ 相邻的 $\triangle ABC$ 的一个外角内. 由于 $\triangle ABC$ 是等

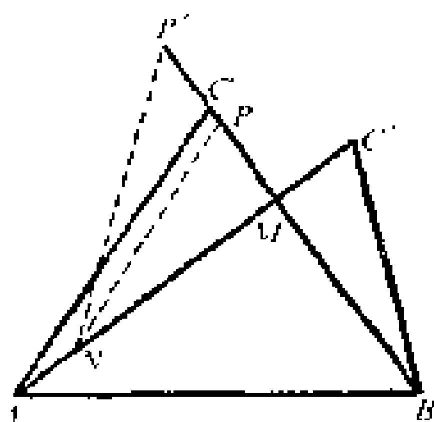


图 5

腰三角形，不妨设 C' 落在 BC 边的外侧，AC' 与 BC 相交. 设 AC' 和 BC 相交于 M，交点 M 将 AC' 和 BC 各分为两段 AM、MC' 及 BM、MC. 由于

$$\angle MAB < \angle CAB,$$

而

$$\angle CAB = \angle CBA = \angle MBA,$$

所以

$$\angle MAB < \angle MBA.$$

因此，在 $\triangle MAB$ 中，$AM > BM$.

这样，我们就可以在线段 AM 上取一点 N，使 $MN = MB$；再在直线 MC 上取一点 P，使 $MP = MC'$. 如果 P 点落在线段 MC 上，那么在 $\triangle NPM$ 和 $\triangle BC'M$ 中，由于 $MN = MB$，$MP = MC'$ 且 $\angle NMP = \angle BMC'$，所以 $\triangle NPM \cong \triangle BC'M$. 因此，$\triangle NPM$ 的面积 $S_{\triangle NPM}$ 也就等于 $\triangle BC'M$ 的面积 $S_{\triangle BC'M}$. 于是

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NMP} + S_{\triangle ANPC}$$

$$= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BC'M} + S_{\triangle ANPC}$$

$$> S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM} = S_{\triangle ABC'}.$$

这就是我们要证的结果.由此,问题全部归结为证明 P 点落在线段 MC 上.如果不是这样,设 P 点落在 MC 的延长线上(记为 P'),那么由于

$$AC + BC = AC' + BC',$$

而

$$BC = BM + MC = BM + MP' - CP',$$

$$AC' = AM + MC' = AN + NM + MC',$$

从而有

$$AC + BM + MP' - CP'$$

$$= AN + NM + MC' + BC'.$$

由于

$$MP' = MC', \quad MN = MB,$$

$$\triangle NP'M \cong \triangle BC'M, NP' = BC'.$$

所以上式可简化为

$$AC - CP' = AN + BC' = AN + NP',$$

即

$$AC = AN + NP' + P'C.$$

这显然是不可能的,因为两点间直线最短.故知

P 点必落在线段 MC 上.

用完全相同的步骤可以证明:

引理 3' 设两三角形的底边长度及两侧边长度之和分别相等,那么两侧边之差较小的三角形具有较大的面积.

附注 引理 3 有一简单的证明:

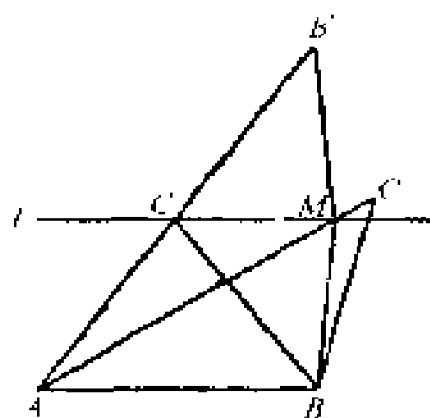


图 5'

设$\triangle ABC$ 为等腰三角形,$\triangle ABC'$不等腰,其公共底边 AB 等于定长,且 $AC + BC = AC' + BC'$(图 5'). 兹证:

$$S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABC'}.$$

不妨设 C、C'在 AB 的同侧,过 C 引直线 l 平行 AB,现只需证 C'落在 l 与 AB 之间. 不然,若 AC'与 l 相交于 M(可能 M 和 C'重合,但 M 和 C 必不重合). 作 B 关于 l 的对称点 B',即延长 AC 至 B',使 $AC = CB'$,连 BM、$B'M$,则有

$$AC' + BC' \geqslant AM + BM = AM + MB'$$

$$> AC + CB' = AC + BC.$$

这是不可能的.

这证明方法虽言简单,但它不能用来证明引理 3'.

习　题

1. 试证：对角线为给定值 $2a$、$2b$ 的平行四边形中，以菱形的面积最大.

2. 试证：边长给定的平行四边形以矩形的面积为最大.

3. 要把一根圆柱形的木料锯成截面是矩形的柱子(图 6)，怎样锯能使废料最少？

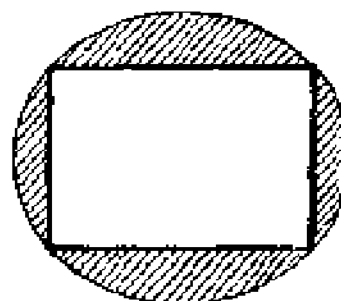


图　6

4. 内接于给定半圆周的所有矩形中，怎样的矩形的面积最大？

5. 圆 O 上给定一点 A，试引弦 BC 平行于 A 点的切线而使三角形 ABC 的面积为最大.

6. 试证：上底、下底及周长给定的所有梯形中，以等腰梯形的面积最大.

7. 试证：底边及面积给定的所有三角形中，以等腰三角形的周界最短.

8*. 设两三角形的底边长度及其侧边长度之和都相等，试证侧边之差较小的三角形具有较大的面积.

3 一些简单的等周问题

这一节里，我们要用上节 3 个引理作为工具推出一些有趣的结果.

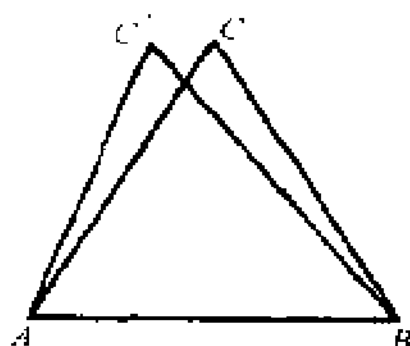


图 7

问题 1 在周长一定的一切三角形中，怎样的三角形面积最大？

设 $\triangle ABC$ 就是那个面积最大的三角形(图 7)，可以证明它一定是正三角形. 若不然，不妨设 $AC \neq BC$，那么将 AB 看作固定的底边，改变顶点 C 的位置到另一点 C'，使得 $AC' = C'B$，$AC' + BC' = AC + BC$. 此时 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 具有相同的底边 AB，且两侧边之和亦相等. 因此根据引理 3，等腰 $\triangle ABC'$ 的面积比 $\triangle ABC$ 的面积大. 另一方面这两三角形又具有相同的周长(因为它们有公共的底边，且两侧边之和相等)，这就与"$\triangle ABC$ 是所有周长相等的三角形中具有最大

面积"的假设相矛盾.这个矛盾表明周长一定面积最大的三角形不可能有不等长的边，所以是一个正三角形.于是我们证明了这样的结论："在周长一定的一切三角形中，以正三角形的面积为最大."

这个结论除了本身的兴趣外，利用它还可推出另一有趣的结果.

在《平均》[①]一书中，证明了一个重要的不等式："n 个正数的几何平均不超过它们的算术平均".这个不等式对 $n=2,4,8,16,\cdots,2^m,\cdots$ 形状的数很容易证明，但对 $n\neq 2^m$ 形状的数证起来颇为不易，就是对 $n=3$ 亦不容易证明.现在我们就想利用上面的几何事实给出 $n=3$ 时的证明，即要证

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}，其中\ \alpha,\beta,\gamma\ 都是正数.$$

命 $a=\beta+\gamma$，$b=\gamma+\alpha$，$c=\alpha+\beta$，以 a、b、c 为边作 $\triangle ABC$(图 8).由于 a、b、c 三正数中，任两数之和都大于第三个数，因此可以做成一个三角形是无疑的.

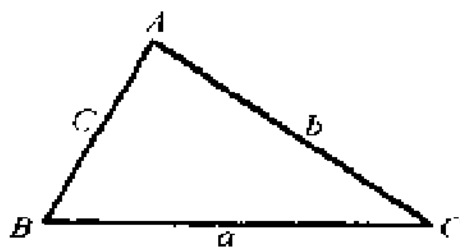


图 8

---

① 《平均》(史济怀著)为本套《数学小丛书》之 5.——编辑注

根据海伦公式,这个三角形的面积为

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

这儿

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\alpha+\beta+\gamma.$$

所以

$$p-a=(\alpha+\beta+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha,$$

$$p-b=\beta,\quad p-c=\gamma.$$

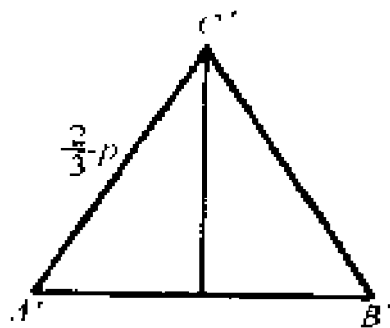


图 9

于是△ABC的面积可以写为

$$S=\sqrt{p(\alpha\beta\gamma)}.$$

由于这个三角形的周长等于$a+b+c=2p$,由刚才证明的命题知道,以$2p$为周长的正三角形$A'B'C'$的面积S'(图9)一定比S大.但

$$S'=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2p}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$$

于是得

$$\sqrt{p\alpha\beta\gamma}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$$

两边平方,得

$$p\alpha\beta\gamma\leqslant\frac{3}{81}p^4=\frac{1}{27}p^4,$$

即

$$\alpha\beta\gamma \leqslant \frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}(\alpha + \beta + \gamma)^3.$$

在不等式两端开立方，即得

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leqslant \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

问题 2 周长一定的一切四边形中，怎样的四边形面积最大？

设四边形 $ABCD$ 就是那个具有最大面积的四边形(图 10). 连对角线 AC，易知当底边 AC 及两侧边 AB、BC 之和一定的条件下，$\triangle ABC$ 的面积亦为最大. 否则，将 $\triangle ABC$ 剪下来换上另一个以 AC 为底、两侧边之和等于 $AB + BC$ 而面积更大的 $\triangle AB^*C$. 此时四边形 AB^*CD 的周长和 $ABCD$ 的周长相等，但却具有更大的面积，这和假设四边形 $ABCD$ 的面积最大相矛盾. 于是，根据引理 3 $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形即 $AB = BC$. 同理可知 $BC = CD$、$CD = DA$，因此，

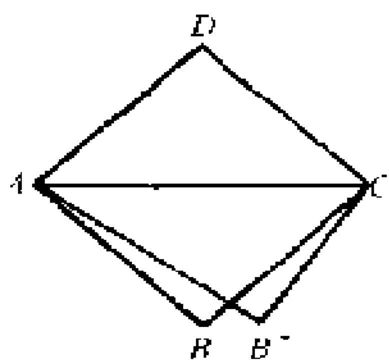


图 10

$ABCD$ 是一个菱形(图 11). 设该菱形的边长为 a，锐角为 θ. 菱形面积等于底乘高，即

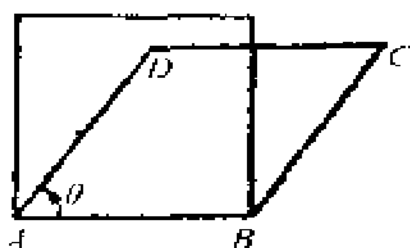


图 11

$$S_{ABCD}=a^2\sin\theta,$$

但因这个菱形是所有边长一定的菱形中具有最大面积者，故必须 $\theta=\frac{\pi}{2}$，也就是说四边形 $ABCD$ 是正方形．周长一定的正方形是惟一的，于是我们得到了类似于问题 1 的结果：

定理　周长一定的一切四边形中，以正方形的面积最大．

由于矩形是一种特殊的四边形；正方形又是一种特殊的矩形，因此根据刚才的定理我们又可推出众所周知的结果：

周长一定的一切矩形中，正方形的面积最大，即两正数 a_1、a_2 的几何平均 $\sqrt{a_1a_2}$ 不超过它的算术平均 $\frac{a_1+a_2}{2}$．

我们还可用它来解答下面的一道题：

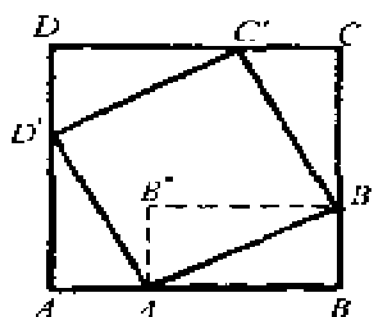


图　12

如图 12，$ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 都是正方形，而 A'，B'，C'，D' 顺次分 AB，BC，CD，DA 成 $m:n$，并设 $AB=1$．试证正方形 $A'B'C'D'$ 的面积不小于 $\frac{1}{2}$．

我们只要证明在所有可能的正方形 $A'B'C'D'$ 中面积最小的等于 $\frac{1}{2}$ 就行

了.

要使正方形 $A'B'C'D'$ 的面积最小,只要边上四个直角三角形的面积最大.由于这四个直角三角形是全等的,因此只要使其中一个有最大面积就可以了.现在考虑 $\triangle A'BB'$,由于 $S_{\triangle A'BB'}=\frac{1}{2}S_{\square A'BB'B''}$,因此只要看在什么情况下矩形 $A'BB'B''$ 有最大面积.因为这种矩形的周长等于 $2AB=2$,是一个常数,于是根据刚才证明过的定理知道,当这矩形是正方形时面积最大.此时 $A'B=BB'$,但因 $A'B+BB'=AB=1$,所以

$$A'B=BB'=\frac{1}{2},$$

即 A'、B' 分别是 AB、BC 的中点.也就是说,当 A'、B'、C'、D' 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点时,正方形 $A'B'C'D'$ 具有最小的面积,此时

$$A'B'=\sqrt{A'B^2+BB'^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以

$$S_{\square A'B'C'D'}=A'B'^2=\frac{1}{2}.$$

问题 3 内接同一圆的所有 n 边形中,怎样的 n 边形面积最大?

解 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 就是那个面积

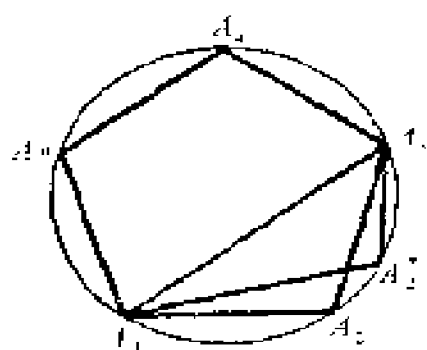


图 13

最大的n边形(图 13). 连结A_1A_3,则所有以A_1A_3为底,而顶点在给定圆弧$\overset{\frown}{A_1A_2A_3}$上的一切三角形中以$\triangle A_1A_2A_3$的面积为最大. 不然的话,必能在$\overset{\frown}{A_1A_2A_3}$上找到另一点$A_2^*$,使$S_{\triangle A_1A_2^*A_3} > S_{\triangle A_1A_2A_3}$,于是$n$边形$A_1A_2^*\cdots A_n$的面积就大于$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的面积,即$S_{A_1A_2^*A_3\cdots A_n} > S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}$,这与假设矛盾. 因此,$\triangle A_1A_2A_3$的面积为最大,根据引理 2 得知$A_1A_2 = A_2A_3$. 同理可知$A_2A_3 = A_3A_4 \cdots A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}A_n$,故知$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$是等边的. 一个$n$边形既等边且又内接于圆,一定是正$n$边形. 由此,我们得到了下面的定理:

定理 内接同一圆的所有n边形中,以正n边形的面积最大.

当$n=3$时,这个定理告诉我们:内接同一圆的所有三角形中,以正三角形的面积最大. 这个结论虽和问题 1 的结论一致,但并不是一回事. 问题 1 所考虑的是一切周长相等的三角形,它不能内接于同一圆;而内接于同一圆的三角形,其周长不可能全部相等. 因此,这两个结论的意义是不一样的.

使用完全相同的方法，可以得到下面类似的定理.

定理 以扇形两半径为邻边，内接同一扇形的所有 $n+2$ 边形中，当内接于圆弧的 n 条边（弦）相等时，$n+2$ 边形的面积最大（图 14）.

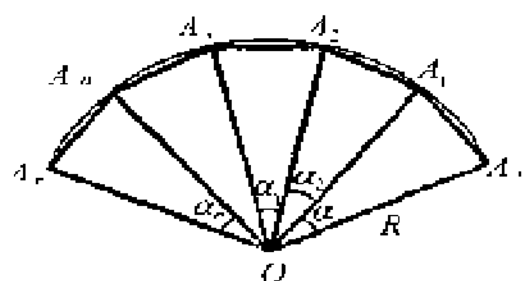


图 14

这个定理使我们能推出一个重要的正弦函数的不等式.

将半径为 R 的扇形 $O\text{-}\overset{\frown}{A_0A_1\cdots A_n}$[①] 任意分为 n 个小扇形 $O\text{-}\overset{\frown}{A_0A_1}$、$O\text{-}\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\cdots$ $O\text{-}\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$（图 14），它们的顶角分别是 α_1、α_2、$\cdots\alpha_n$. 连小扇形弧的两端，得 n 个三角形 OA_0A_1、OA_1A_2、$\cdots OA_{n-1}A_n$，它们的面积之和是

$$\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n).$$

定理告诉我们：当扇形 $O\text{-}\overset{\frown}{A_0A_n}$ 被 n 等分时，相应所得三角形的面积之和为最大. 此时，三角形的顶角为

---

① 中学课本上记为：扇形 OA_0A_n.

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}.$$

故得

$$\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n},$$

即

$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{n}$$

$$\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}.$$

在关于三角形的等周问题里，讨论了两边长度给定的三角形什么时候面积最大。引理一告诉我们：当给定的两边相互垂直时具有最大的面积。由此，我们自然地会想到这样的问题：

问题 4 在三边长度一定的一切四边形中，怎样的四边形面积最大(图 15)?

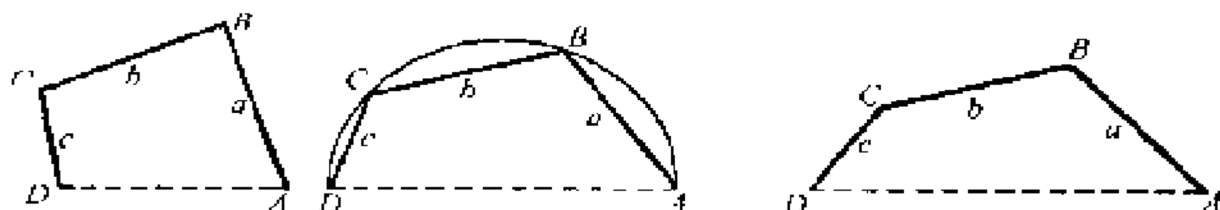
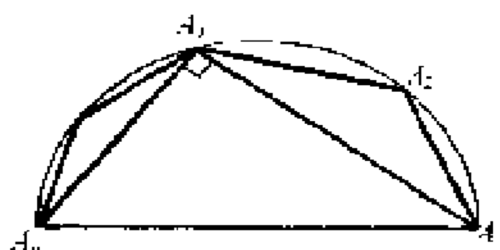


图 15

事实上，我们有更一般的结果：

定理 设n边形的n边之中只有一边的长度可以任意选取，其余$n-1$边的长度一定．一切这样的n边形中，具有最大面积的n边形一定内接于以长度可以任意选取的那条边为直径的半圆周．


图 16

证明 设具有最大面积的n边形为$A_1A_2\cdots A_n$，长度可任意选取的一边为A_1A_n（图16）．连A_1A_3、A_3A_n，若$\angle A_1A_3A_n$不是直角的话（即A_1A_3和A_3A_n不互相垂直），那么保持三角形$A_1A_2A_3$及$n-2$边形$A_3A_4\cdots A_n$的形状而将$\angle A_1A_3A_n$改变成为直角．因为A_1A_n的长度可以任意选取．此时，根据引理1，$\triangle A_1A_3A_n$的面积增大了，因而n边形$A_1A_2\cdots A_n$的面积也增大了．这和假设矛盾，因此$\angle A_1A_3A_n$为直角．连A_2A_n、A_1A_4、A_4A_n、$\cdots A_{n-2}A_n$、$A_{n-1}A_1$，同理可证$\angle A_1A_2A_n$、$\angle A_1A_4A_n$、$\cdots\angle A_1A_{n-1}A_n$均为直角．于是，$A_2$、$A_3$、$\cdots A_{n-1}$都落在以$A_1A_n$为直径的半圆周上．

习　题

1．已知直角三角形的一直角边与斜边的长度之

和为定值.试求具有最大面积的直角三角形.

2. 试用更简单的办法直接证明:周长一定的一切矩形中,以正方形面积为最大.

3. 试证:周长及顶角给定的平行四边形中,以菱形的面积最大.

4. 试证:周长及顶角给定的平行四边形中,以圆外切平行四边形的面积为最大.

5. 试证:顶角及两侧边之和为一定的三角形中,以等腰三角形的面积最大.

6*. 设四边形的三边长为给定值 a、b、c,另一边的长度 x 可任意选取.试证当面积具有最大值时,x 必满足:$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$.并且进一步证明长度 x 是惟一确定的.

4 关于四边形的一个定理

我们知道,一个三角形在三边长度给定的条件下,这个三角形的形状及它的面积就被惟一地确定下来.但对四边形来讲,情况就大不相同了.当四边长度给定时,可以做出各种各样形状的四边形.譬如,我们取长度分别为a、b、c、d的四根小木条,并用铰链联成一个活动的四边形(图 17).活动这个四边形的顶角,便可得到各种形状的四边形,这些四边形具有不同的面积.我们问:在这些四边形中,怎么样的四边形具有最大的面积?

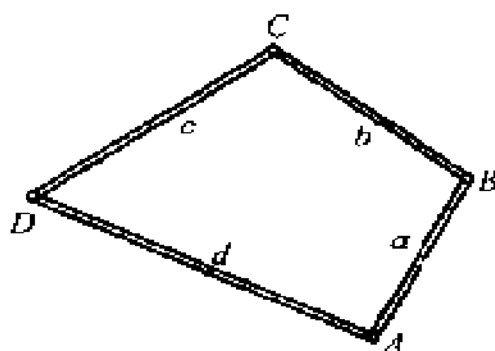


图 17

下面的定理回答了这个问题.

定理 1　在四边长度给定的一切四边形

中，内接于圆的四边形具有最大的面积.

证明 设四边形 $ABCD$ 及 $A_1B_1C_1D_1$ 具有给定边长且对应边相等(图 18)，四边形 $ABCD$ 内接于圆而 $A_1B_1C_1D_1$ 不内接于圆. 作通

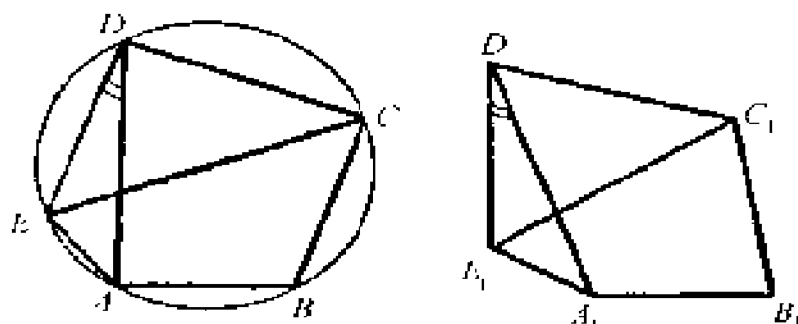


图 18

过 C 点的直径 CE，连 DE、EA 组成$\triangle DEA$. 如图 18，在 D_1A_1 的外侧作$\triangle D_1E_1A_1$ 使它全等于$\triangle DEA$（$DA = D_1A_1$）. 连 E_1C_1，根据引理 1 得知

$$S_{\triangle C_1D_1E_1} < S_{\triangle CDE}\text{（因为 } CD \perp DE\text{）},$$

而 C_1D_1 不垂直 D_1E_1，否则 $\angle CDA = \angle C_1D_1A_1$，$AC = A_1C_1$，将导致两五边形 $ABCDE$、$A_1B_1C_1D_1E_1$ 全等，这是不可能的. 在四边形 $E_1A_1B_1C_1$ 和 $EABC$ 中，由于三边长相等（$EA = E_1A_1$、$A_1B_1 = AB$、$B_1C_1 = BC$），但四边形 $EABC$ 内接于以 CE 为直径的半圆，而 $E_1A_1B_1C_1$ 不内接于半圆，因此根据上节最后

的定理，四边形 $E_1A_1B_1C_1$ 的面积 $S_{E_1A_1B_1C_1}$ 小于 $EABC$ 的面积 S_{EABC}，即

$$S_{E_1A_1B_1C_1} < S_{EABC}.$$

从而有

$$\begin{aligned} S_{E_1A_1B_1C_1D_1} &= S_{E_1A_1B_1C_1} + S_{\triangle C_1D_1E_1} \\ &< S_{EABC} + S_{\triangle CDE} = S_{EABCD}. \end{aligned}$$

由于

$$S_{\triangle D_1E_1A_1} = S_{\triangle DEA},$$

相减得

$$S_{A_1B_1C_1D_1} < S_{ABCD}.$$

这个证明是不够严密的.细心的读者可能会提出这样的问题:难道在边长给定的条件下,适当调整夹角一定能使四边形内接于圆吗?

引理　在保持四边形各边长度的条件下,适当调整它的顶角,一定能够使它内接于圆.

证明　设四边形 $ABCD$ 的形状是任意的,不一定内接于圆,但边长是给定的[①]: $AB=a$、$BC=b$、$CD=c$、$DA=d$(图 19).对四正数 a、

---

① 当然假设这四条线段能作成四边形,即任三边长度之和大于第四边.

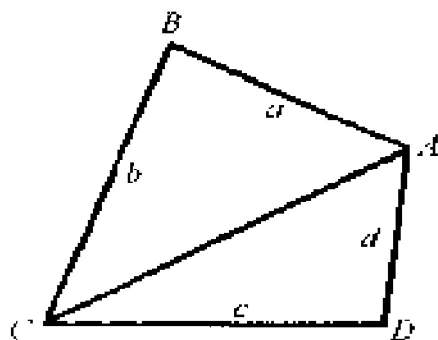


图 19

b、c、d 来说，关系式

$$a^2+b^2\leqslant c^2+d^2;$$

$$c^2+d^2\leqslant a^2+b^2$$

至少有一个成立.不妨设

$$c^2+d^2\leqslant a^2+b^2,$$

连对角线 AC，在$\triangle ABC$ 中有不等式$|b-a|<AC$；在$\triangle ACD$ 中有不等式$AC<c+d$.联合起来得到

$$|b-a|<c+d$$

或

$$a^2+b^2-2ab<c^2+d^2+2cd,$$

$$a^2+b^2-(c^2+d^2)<2ab+2cd.$$

由于 $c^2+d^2\leqslant a^2+b^2$，易知有关系式

$$0\leqslant\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}<1.$$

因此可令

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$$

$$(\cos\theta\geqslant 0,\theta \text{ 为锐角})$$

或

$$\theta = \arccos \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)} < \frac{\pi}{2}.$$

我们证明，如果让 AB、BC 两边的夹角等于 θ，CD、DA 两边的夹角等于 $\pi - \theta$，那么 AB、BC、CD、DA 四条边恰好能构成一个四边形．为了避免混淆，记 $\triangle CDA$ 的 AC 边为 A^*C^*（图 20）．我们只须证明图 20 中的 AC 和 A^*C^* 相等就行了．由余弦定理：

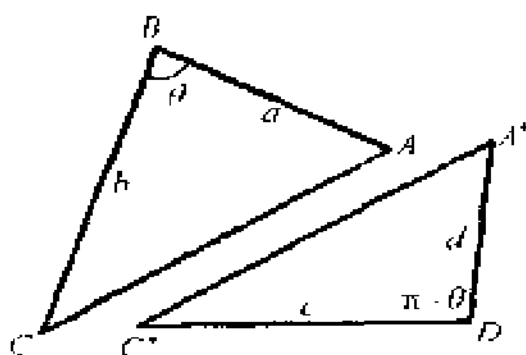


图 20

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

$$A^*C^{*2} = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \theta)$$

$$= c^2 + d^2 + 2cd\cos\theta,$$

根据关系式

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)},$$

得知

$$2(ab + cd)\cos\theta = a^2 + b^2 - (c^2 + d^2),$$

即

$$c^2 + d^2 + 2cd\cos\theta = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

故得

$$AC^2 = A^*C^{*2}, 或 AC = A^*C^*.$$

这个四边形的四边之长为 a、b、c、d；且因对角互补，因此是一个边长给定的圆内接四边形.

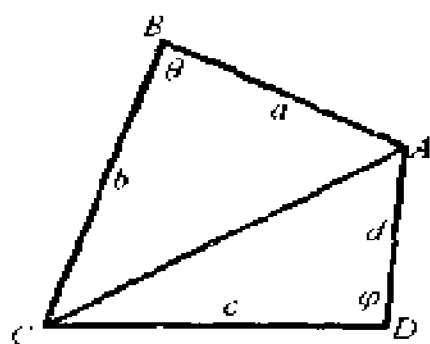


图 21

现在我们可以使用分析的方法给出定理 1 的严格证明.

设 AB、BC 的夹角为 θ，CD、DA 的夹角为 φ（图 21）. 易知，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\theta$，$S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}cd\sin\varphi$.

显然，四边形 $ABCD$ 的面积：

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\varphi$$

或

$$2S = ab\sin\theta + cd\sin\varphi. \tag{1}$$

另一方面，在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle CDA$ 中，根据余弦定理得

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$= c^2 + d^2 - 2cd\cos\varphi,$$

或

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = ab\cos\theta - cd\cos\varphi. \tag{2}$$

将关系式(1)和(2)两边平方相加得

$$4S^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$= a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\theta + \varphi)$$

或

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$- 2abcd\cos(\theta + \varphi). \tag{3}$$

由于 a、b、c、d 是给定的正数,因此

$$a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \text{ 及 } 2abcd$$

都是常数. 显然,当 $\cos(\theta + \varphi) = -1$ 时,(3)式达到最大值. 此时

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2$$

$$- c^2 - d^2)^2 + 2abcd$$

$$= (ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2.$$

由于 $\cos(\theta+\varphi)=-1$，即 $\theta+\varphi=\pi$，它表明四边形 $ABCD$ 的对角互补，因此面积最大的四边形是圆内接四边形.

上述证明顺便给出四边长度给定时，四边形面积的最大值

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(ab+cd)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}. \tag{4}$$

这也就是四边给定且又内接于圆的一般四边形的面积公式.

设 $a+b+c+d=2p$，公式(4)能改写成更对称更完整且便于记忆的形式

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{16}[4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2] \\
&= \frac{1}{16}[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)] \\
&\quad \cdot [2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)] \\
&= \frac{1}{16}[(a+b)^2-(c-d)^2] \\
&\quad \cdot [(c+d)^2-(a-b)^2] \\
&= \frac{1}{16}(a+b-c+d)(a+b+c-d)
\end{aligned}
$$

$$\cdot (c+d-a+b)(c+d+a-b)$$

$$= \frac{1}{16}(2p-2c)(2p-2d)$$

$$\cdot (2p-2a)(2p-2b)$$

$$= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

或

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

这个关于 a、b、c、d 具有对称形式的公式还告诉我们:面积的最大值与给定边的次序无关,仅由给定的边长 a、b、c、d 所惟一确定.

请读者注意,假如四边形 $ABCD$ 的边长中有一边的长度逐渐缩短而最后趋于零,譬如 $DA=d=0$. 此时,四边形退化为三角形,任何三角形都内接于圆,故得三角形面积

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\left(p = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{a+b+c}{2}\right).$$

这就是著名的海伦公式. 因此上述公式是海伦公式的推广.

我们指出,公式(4):

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(ab+cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$$

是我国南宋数学家秦九韶在他所著《数书九章》中的三斜求积(已知三边求三角形的面积)公式：

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2}$$

的推广.

习　　题

1．试证：圆内接平行四边形是矩形.

2．设边长为 a、b、c、d 的四边形既内接于圆又外切于圆.试证：$S=\sqrt{abcd}$.

3．根据定理 1 及公式(4)再次证明：周长一定的一切四边形中，以正方形的面积最大(上节问题 2).

4．试证：四个正数的几何平均不超过它的算术平均.

5．根据几何图形证明：边长给定的四边形其面积的最大值与给定边的次序无关(图 22).

6*．设四边长度给定为 a、b、c、d，求作面积最大的四边形.

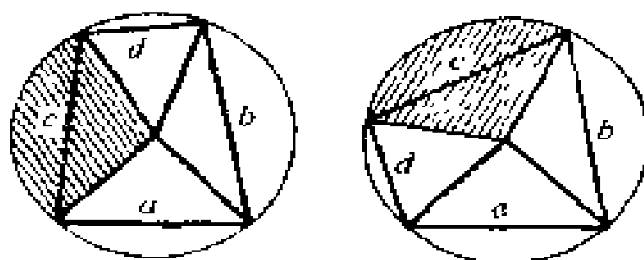


图　22

5 正多边形的极值性质

我们将定理 1 推广到多边形的情形.

克拉美定理 在给定边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的所有 n 边形中,能够内接于圆的 n 边形具有最大的面积.

证明 设 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 为具有给定边长且内接于圆的 n 边形;$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$ 为具有同样的给定边长而不内接于圆的 n 边形. 我们将证明

$$S_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} > S_{B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n}.$$

在圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 上,取定顶点 A_1,作过 A_1 的直径 A_1A(图 23). 设 A 点落在外接圆的 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 上,连 A_iA、AA_{i+1}. 再在 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的对应边 B_iB_{i+1} 的外侧作 $\triangle B_iBB_{i+1}$,使 $\triangle B_iBB_{i+1} \cong \triangle A_iAA_{i+1}$. 连 B_1B,多边形 $B_1B_2\cdots B_iB$ 和 $B_1BB_{i+1}\cdots B_n$ 中

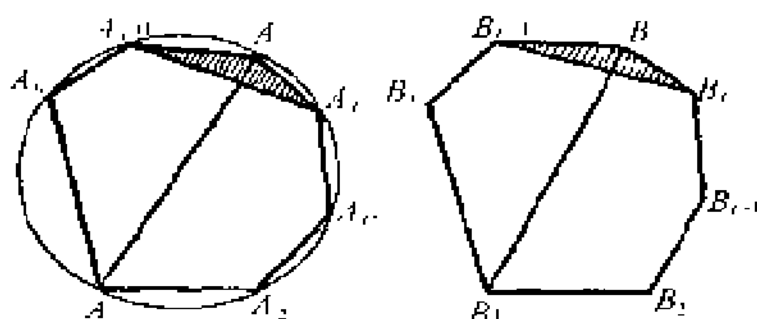


图 23

至少有一个不内接于以 B_1B 为直径的半圆（否则，n 边形 $B_1B_2\cdots B_iB_{i+1}\cdots B_n$ 将内接于圆）. 但多边形 $A_1A_2\cdots A_iA$ 和 $A_1AA_{i+1}\cdots A_n$ 都内接于以 A_1A 为直径的半圆. 由于多边形 $B_1B_2\cdots B_iB$ 和 $A_1A_2\cdots A_iA$ 以及多边形 $B_1BB_{i+1}\cdots B_n$ 和 $A_1AA_{i+1}\cdots A_n$ 除 B_1B 可能不等于 A_1A 外，其余对应边一一相等，因此，根据第 3 节最后的一个定理得知

$$S_{B_1B_2\cdots B_iB} < S_{A_1A_2\cdots A_iA}$$

或

$$S_{B_1BB_{i+1}\cdots B_n} < S_{A_1AA_{i+1}\cdots A_n}.$$

两者之中至少必有一成立. 将上两不等式相加

$$S_{B_1B_2\cdots B_iBB_{i+1}\cdots B_n} < S_{A_1A_2\cdots A_iAA_{i+1}\cdots A_n},$$

两端减去 $S_{\triangle A_iAA_{i+1}} = S_{\triangle B_iBB_{i+1}}$，得

$$S_{B_1B_2\cdots B_iB_{i+1}\cdots B_n} < S_{A_1A_2\cdots A_iA_{i+1}\cdots A_n}.$$

这个定理的证明是不够严密的.因为我们一开始就假定了在边长给定的所有 n 边形中,至少存在一个内接于圆的 n 边形.这件事情并不很明显,应该加以证明.不过它的证明离开我们的主题太远,不准备在这儿叙述了.我们只做如下简单的说明:作一个半径足够大的圆,将给定边 a_1、a_2、$\cdots a_n$ 的端点首尾相接地安置在圆内作为圆的弦(图24).起初,由于半径足够的大,端点 A_1 和 A_{n+1} 是分离开来的,当半径收缩时,点 A_1 和 A_{n+1} 逐渐接近,最后一定能合并为一点,当这两点重合时,我们就得到了圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$,这就是我们所要的边长给定的圆内接 n 边形.

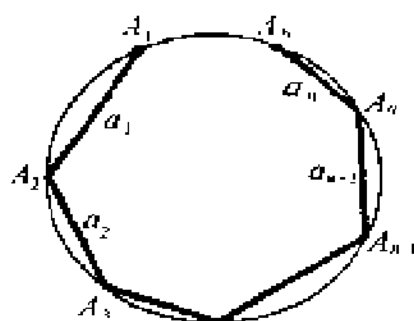


图 24

现在进入讨论正 n 边形所具有的极值性质.

我们已经知道,周长一定的三角形以正三角形的面积最大;周长一定的四边形以正方形的面积最大.我们问:周长给定的 n 边形什么时候面积最大?

下面将使用上述克拉美定理及第2节引理3*来证明:

定理 2 周长为给定值 l 的一切 n 边形中，正 n 边形具有最大的面积.

证明 我们先来证明这样一个事实：任何周长为 l 的不等边 n 边形的面积一定小于某一周长为 l 的等边 n 边形的面积.

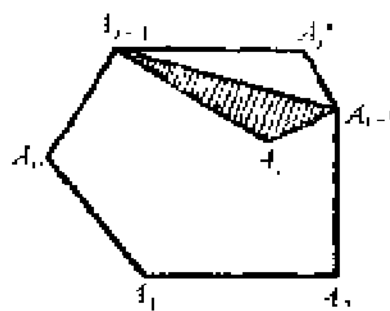


图 25

首先，我们指出：具有最大面积的 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 必须是凸 n 边形，即每一顶角小于 $180°$. 假如不然，设 $\angle A_i > 180°$，连 $A_{i-1}A_{i+1}$，则 $A_{i-1}A_{i+1}$ 全部在 n 边形的外面(图 25). 将 $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ 以 $A_{i-1}A_{i+1}$ 为对称轴反射出去，得 $\triangle A_{i-1}A_i^*A_{i+1}$，$A_{i-1}A_i = A_{i-1}A_i^*$、$A_iA_{i+1} = A_i^*A_{i+1}$. 这样一来，$n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{i-1}A_i^*A_{i+1}\cdots A_n$ 和 $A_1A_2\cdots A_i\cdots A_n$ 具有相同的周长，但前者却具有更大的面积，这是不可能的. 因此，具有最大面积的 n 边形必须是凸 n 边形. 其次，我们证明：任何凸 n 边形可以交换两邻边的位置而使得它的周长和面积都不改变(图 26). 连 A_1A_3，作它的垂直平分线 L，以 L 为对称轴，将 $\triangle A_1A_2A_3$ 反射过来，得 $\triangle A_1A_2^*A_3$. 因

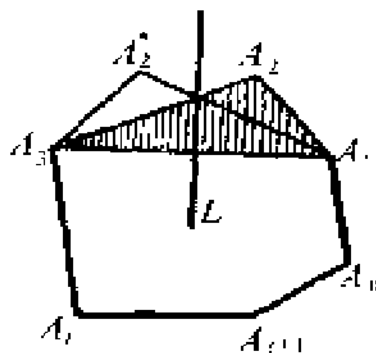


图 26

为$A_1A_2 = A_3A_2'$，$A_1A_2' = A_3A_2$，所以$S_{\triangle A_1A_2A_3} = S_{\triangle A_1A_2'A_3}$. 显然，$n$ 边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 和$A_1A_2'A_3\cdots A_n$ 具有相等的周长和面积.

现在我们可以来证明上述事实了.

设不等边 n 边形$A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为a_1、a_2、$\cdots a_n$. 用 α 记它们的算术平均，即 $\alpha = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，易知其中必有一边大于 α，一边小于 α. 由于邻边的次序可以任意交换，故不妨设

$$a_1 > \alpha > a_2,$$

用满足条件 $A_1B + BA_3 = A_1A_2 + A_2A_3 = a_1 + a_2$ 和 $A_1B = \alpha$ 的 $\triangle A_1BA_3$ 来调换 $\triangle A_1A_2A_3$（图 27）. 由于 $a_1 > \alpha = A_1B > a_2$，$A_1B + BA_3 = a_1 + a_2$，所以

$$BA_3 > a_2 \quad (\text{因为 } A_1B < a_1),$$

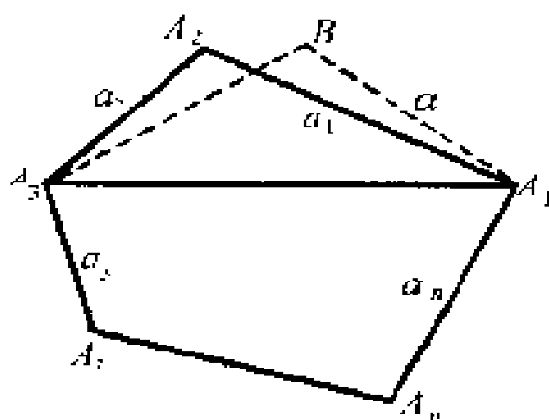


图 27

$$BA_3 < a_1 \quad (\text{因为 } A_1B > a_2),$$

即

$$a_1 > BA_3 > a_2.$$

由于

$$a_1 > A_1B > a_2 \text{ 及 } a_1 > BA_3 > a_2,$$

得知

$$|A_1B - BA_3| < a_1 - a_2 = A_1A_2 - A_2A_3.$$

因此具有共同底边 A_1A_3 的两三角形 $A_1A_2A_3$、A_1BA_3 中，$\triangle A_1BA_3$ 的侧边之差小于$\triangle A_1A_2A_3$ 的侧边之差，故由引理 3* 知

$$S_{\triangle A_1BA_3} > S_{\triangle A_1A_2A_3}.$$

由此推知

$$S_{A_1BA_3\cdots A_n} > S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}.$$

通过上面的手续，我们得到了 n 边形 $A_1BA_3\cdots A_n$，它的面积比原来的 n 边形增大了，但周长却和原来的一样. 同时在它的 n 边中有一边的长度恰好是原来 n 边形边长的算术平均 a. 如果此时 n 边形 $A_1BA_3\cdots A_n$ 仍然是不等边形的，那么其中必仍然有一边大于 a、一边小于 a. 于是重复上述步骤，我们又可得到一

个新的 n 边形，它的面积更大了，周长还和原来的一样，而且在这 n 边形中又多了一条长度为 α 的边．这样下去，长度为 α 的边一次次地增加，面积不断地扩大，但周长却始终不变．最多到第 n 次，一定能得到一个边长全等于 α，周长还是给定值 l，但面积却增大了的 n 边形．这就是我们要证明的事实．

现在我们只要在周长为 l 的所有等边 n 边形中找一个面积最大的就行了．这种 n 边形每边的长度等于 α，即 $\frac{l}{n}$，是一个定数．于是由克拉美定理知，面积最大的一定内接于圆．易知内接于圆的等边 n 边形必是正 n 边形．定理至此全部得证．

上述证明给出了一种重要的证题方法，这种方法在证明另一些问题时也很有效．作为一例，我们来证明一个重要的不等式：

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n > 0),$$

即 n 个正数的几何平均不超过它们的算术平均．

根据恒等式

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

E，将这条边看作是由两条边相交于 E 点、不过交角是平角(图 28). 这样一来，P 就成为 $n+1$

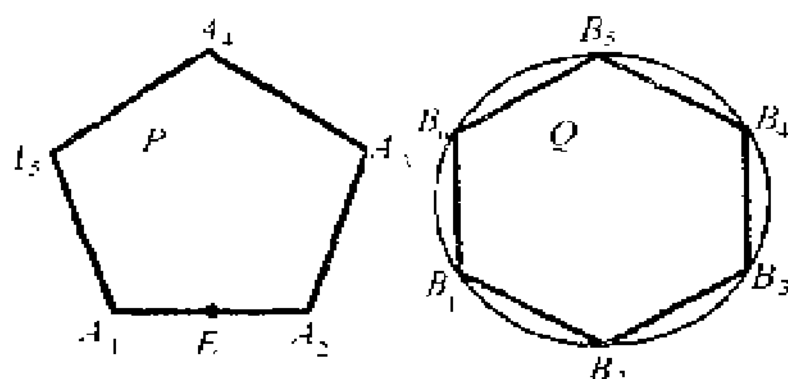


图 28

边形了，但不是正 $n+1$ 边形. 周长相等的 $n+1$ 边形中，正 $n+1$ 边形具有最大的面积. 因此

$$S_P < S_Q,$$

即正 $n+1$ 边形比正 n 边形的面积来得大.

当 $n=3$ 时，得知正三角形的面积小于周长相等的正方形的面积；而正方形的面积又小于正五边形的面积…. 依此类推，我们得到：当周长给定时，正多边形的边数愈多，面积愈大. 你们想想看，当边数无限增加时，将会发生怎么样的结果.

习　　题

1. 设给定边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 n 边形能够内接于圆. 试证：外接于该 n 边形的圆是惟一的.

2. 试证：边长给定的 n 边形其面积的最大值与给

E，将这条边看作是由两条边相交于 E 点、不过交角是平角（图 28）．这样一来，P 就成为 $n+1$

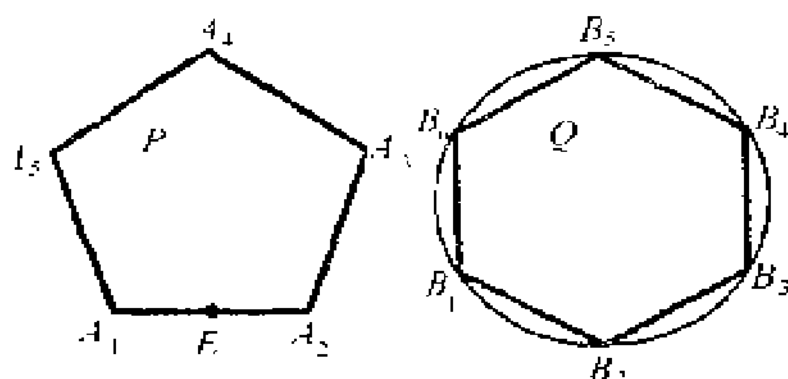


图 28

边形了，但不是正 $n+1$ 边形．周长相等的 $n+1$ 边形中，正 $n+1$ 边形具有最大的面积．因此

$$S_P < S_Q,$$

即正 $n+1$ 边形比正 n 边形的面积来得大．

当 $n=3$ 时，得知正三角形的面积小于周长相等的正方形的面积；而正方形的面积又小于正五边形的面积…．依此类推，我们得到：当周长给定时，正多边形的边数愈多，面积愈大．你们想想看，当边数无限增加时，将会发生怎么样的结果．

习　　题

1．设给定边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 n 边形能够内接于圆．试证：外接于该 n 边形的圆是惟一的．

2．试证：边长给定的 n 边形其面积的最大值与给

E，将这条边看作是由两条边相交于 E 点、不过交角是平角(图 28). 这样一来，P 就成为 $n+1$

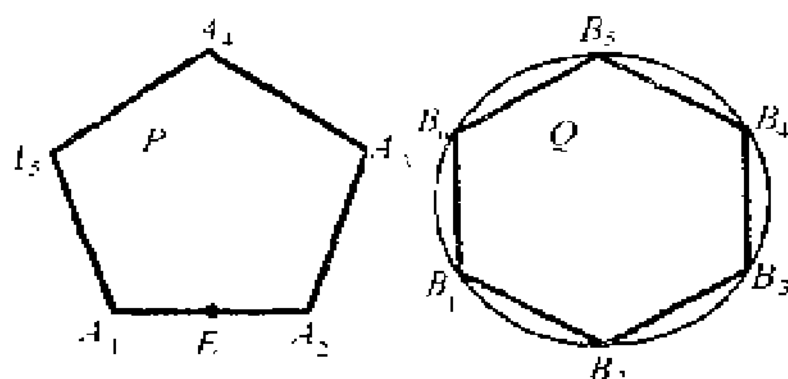


图 28

边形了，但不是正 $n+1$ 边形. 周长相等的 $n+1$ 边形中，正 $n+1$ 边形具有最大的面积. 因此

$$S_P < S_Q,$$

即正 $n+1$ 边形比正 n 边形的面积来得大.

当 $n=3$ 时，得知正三角形的面积小于周长相等的正方形的面积；而正方形的面积又小于正五边形的面积…. 依此类推，我们得到：当周长给定时，正多边形的边数愈多，面积愈大. 你们想想看，当边数无限增加时，将会发生怎么样的结果.

习 题

1. 设给定边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 n 边形能够内接于圆. 试证：外接于该 n 边形的圆是惟一的.

2. 试证：边长给定的 n 边形其面积的最大值与给

定边的次序无关.

3. 利用引理 3 证明:周长给定的 n 边形中,面积最大的 n 边形一定是等边的.

4. 利用定理 1 证明:给定边长为 a_1、a_2、$\cdots a_n$ 的所有 n 边形中,以圆内接 n 边形的面积最大(克拉美定理).

5. 试证:顶角及高度一定的所有三角形中,以等腰三角形的面积最小.

6. 设从圆外定点 P 引定圆 O 的两切线 PA、PB(图 29),再在小圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 内任取一点 C,过 C 引切线与 PA、PB 交于 Q、R. 试证:当 C 点位于 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时,$\triangle PQR$ 的面积最大.

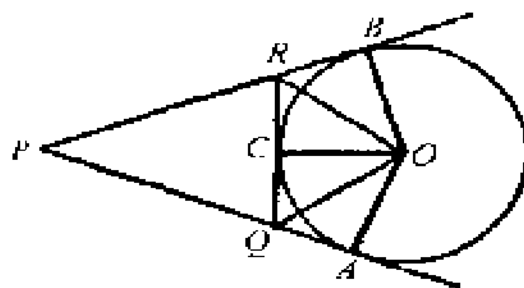


图 29

7. 试证:外切于定圆的所有 n 边形中,以正 n 边形的面积为最小.

8. 试证:外切于定圆的所有 n 边形中,以正 n 边形的周长为最短.

6 圆的极值性质

前面我们讨论了由直线段所组成的图形——三角形、四边形、多边形——的等周问题.现在开始讨论以任意形状的曲线为边界的等周问题.主要是对实验二的结论给予数学证明,并叙述它的应用.

定理 3 在周长一定的所有封闭平面曲线中,圆周所围的面积最大.

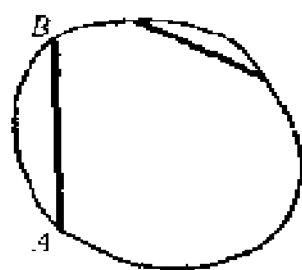


图 30

在证明这个定理以前,我们先讲一讲什么叫凸图形.如果在图形的周界上任取两点 A、B,其联线 AB 全部落在图形的内部,则称这图形为凸的,如圆、椭圆都是凸图形(图 30).图 31 所示的图形就不是凸的.

现在来证明定理.

首先证明:如果 $\mathscr{L}$ 是周长一定的所有封闭曲线中围成最大面积的那条封闭曲线,则 $\mathscr{L}$ 所

围成的图形 Φ 一定是凸的.因为如果 Φ 不是凸图形,那么必能在 γ 上找到两点,例如 A、C,这两点的联线 AC 全部落在图形的外面(图31).此时以 AC 为轴,将曲线

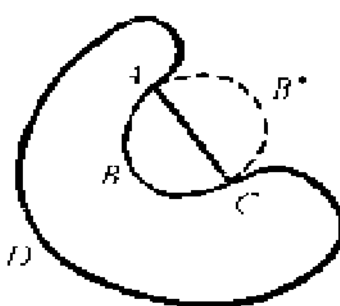


图 31

ABC 反射到另一侧成为曲线 AB^*C.显然图形 $ABCD$ 和图形 AB^*CD 具有相等的周长,但后者具有更大的面积.这就与图形 $ABCD$ 具有最大面积的假设相矛盾.因此,具有最大面积的图形 Φ 一定是凸的.

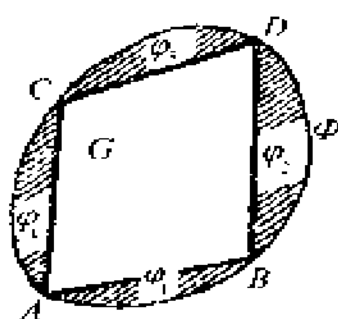


图 32

现设周长一定的封闭曲线中,凸图形 Φ 的面积为最大(图 32),我们证明:它必定是圆.

在凸图形 Φ 上取定三点 A、B、C,过此三点可作出惟一的一个圆,记为 Q.再在 Φ 上任取一点 D,那么 D 点必落在圆 Q 的周界上.假如不然,A、B、C、D 四点就不共圆,顺次连结 A、B、D、C 作成四边形 G(图 32).由于图形 Φ 是凸的,四边形 G 完全落在图形 Φ 的内部,并且 Φ 的周界被点 A、B、D、C 分为四段,每段和四边形 G 的一边组成带有直线段的图形 φ_1、φ_2、φ_3、φ_4.将四边形 G 的边长及图形 φ_1、φ_2、φ_3、φ_4 的形

状固定起来，调整四边形 G 的顶角使它成为圆内接四边形 G^*. 由于 G^* 内接于圆，根据定理1，它比四边形 G 具有更大的面积. 因为在调整四边形顶角的过程中，我们保持了图形 φ_1、φ_2、φ_3、φ_4 的形状，因此其面积没有改变. 当四边形 G 调整为 G^* 时，凸图形 Φ 将随着四边形 G 的改变而成为图形 Φ^*，Φ^* 相当于将图形 φ_1、φ_2、φ_3、φ_4 按相应边长加在四边形 G^* 的外侧而成(图 33). 显然，Φ^* 和 Φ 具有同样的周长，但由于 $S_{G^*} > S_G$，因此 Φ^* 具有更大的面积. 这是不可能的，因为假设 Φ 的面积最大. 故知 A、B、C、D 四点非共圆不可，即 D 点落在圆 Q 的周界上. 由于 D 点是任意选取的，所以凸图形 Φ 必定是圆.

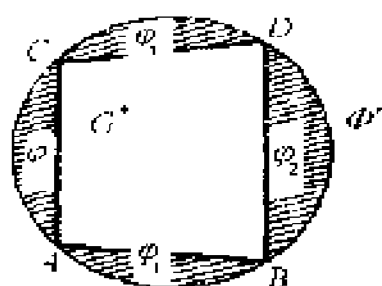


图 33

这个定理在数学史上占着重要的地位. 它对数学的重要分支——变分法的产生和发展起了重大的作用. 很多数学家研究过这个问题，给出了各种不同的证明，这里再介绍近世几何学家施太纳的一个证明.

首先，如上所证，周长给定、面积最大的图形一定是凸的.

其次，设 Φ 还是那个具有最大面积的图形，我们可以证明：任一平分周长的弦必定同时

划分面积为相等的两部分.

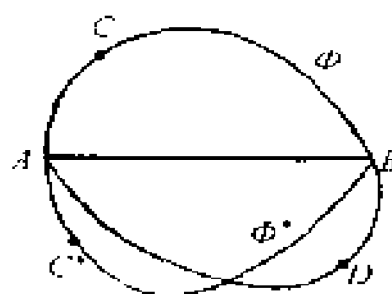


图 34

事实上,如果弦 AB 平分凸图形的周长为相等的两部分 ACB 和 ADB,而将面积分为不相等的部分,不妨设 $S_{ACB}>S_{ADB}$(图 34).今以 AB 为轴,将曲线 ACB 反射到另一侧,记为 AC^*B,由 ACB 和 AC^*B 所组成的图形记为 Φ^*,显然 Φ 比 Φ^* 具有相同的周长,但 Φ^* 比 Φ 具有更大的面积,这又和 Φ 是具有最大面积的假定相矛盾.

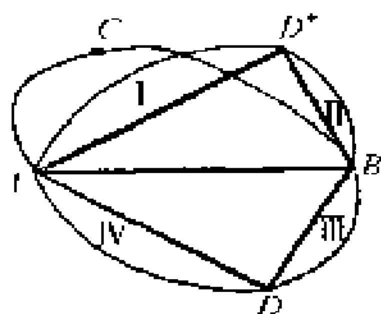


图 35

最后,我们来证明这样的 Φ 必定是圆.设图形 Φ 被弦 AB 分为周长和面积都相等的两部分 ACB 和 ADB.以 AB 为对称轴,将曲线 ADB 反射到 AB 的另一侧,记为 AD^*B(图 35),由对称曲线 ADB 和 AD^*B 所组成的图形 Φ^* 和 Φ 具有相同的周长和面积.在曲线 ADB 上任取一点 D,它关于 AB 轴的对称点落在曲线 AD^*B 上,记作 D^*.显然 $\triangle ADB\cong\triangle AD^*B$.我们证明:$\angle ADB=\angle AD^*B=90°$.如果 $\angle ADB\neq 90°$,此时,可以保持四边形 $ADBD^*$ 各边的长度及它们所对应的曲线弧的长度以及由 AD^* 和 $\overset{\frown}{AD^*}$,D^*B 和

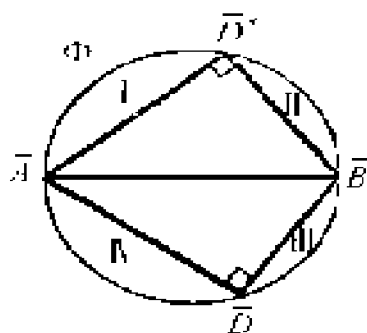


图 36

$\overset{\frown}{D^* B}$，BD 和 $\overset{\frown}{BD}$，DA 和 $\overset{\frown}{DA}$ 所围成的面积(即图 35中的 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 四块面积)不变，而将四边形 $ADBD^*$ 变成四边形 $\overline{A}\overline{D}\overline{B}\overline{D}^*$(图 36)，使得

$$\angle\overline{A}\overline{D}\overline{B} = \angle\overline{A}\overline{D}^*\overline{B} = 90^\circ.$$

此时 Φ^* 被改变成为 $\overline{\Phi}$，显然 Φ 的周长和 Φ^* 的周长相同，因而亦和 Φ 的周长相同. 再看它们的面积，由于 $\triangle ADB$ 和 $\triangle\overline{A}\overline{D}\overline{B}$ 的对应边

$$AD = \overline{A}\overline{D}, BD = \overline{B}\overline{D},$$

但因 $\angle\overline{A}\overline{D}\overline{B} = 90^\circ$，故由引理一知 $S_{\triangle\overline{A}\overline{D}\overline{B}} > S_{\triangle ADB}$. 因而 $S_{\square\overline{A}\overline{D}\overline{B}\overline{D}} > S_{\square ADBD^*}$，又因边上四块的面积 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 没有改变，所以整个图形 $\overline{\Phi}$ 的面积大于 Φ^* 的面积，即 $\overline{\Phi}$ 的面积大于 Φ 的面积. 这样，我们就作出了一个图形 $\overline{\Phi}$，它的周长和 Φ 一样，但其面积却比 Φ 大，这显然与 Φ 的假设相矛盾. 因此

$$\angle ADB = \angle AD^* B = 90^\circ,$$

D 点必落在以 AB 为直径的半圆周上，由于 D 点是任意选取的，故知曲线 ADB 是以 AB 为直径的半圆. 同理曲线 ACB 亦是以 AB 为直径的

半圆，于是知图形 Φ 是一个圆.

使用完全类似的想法可以解决球的极值问题：一切体积相同的立体中，球体具有最小的表面积. 关于球的极值性质的证明，将在下一节给出.

定理 3 还可用另一种方式来叙述.

定理 3′ 面积一定的所有平面图形中，圆的周界最短.

证明 设 C 为一圆，F 是面积与 C 相等的任一图形，只须证明 F 的周界比圆 C 的周界长就行了. 为此作圆 B（图 37），使其周长和 F 的周长相等，则由上面所证的定理知圆 B 的面积大于 F 的面积，即

$$S_B > S_F.$$

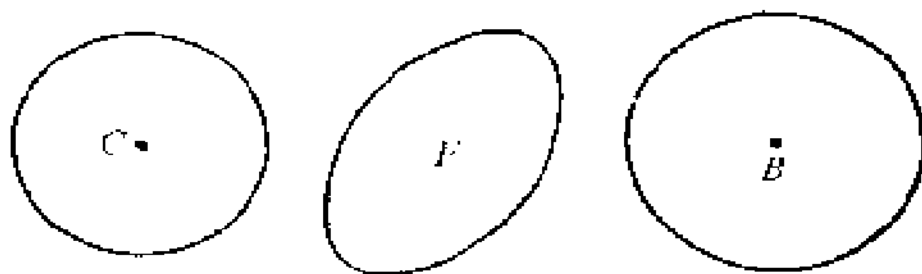


图 37

但因 $S_C = S_F$，故知

$$S_B > S_C.$$

既然圆 B 的面积大于圆 C 的面积，显然圆 B 的周长也就大于圆 C 的周长了．但因圆 B 的周长和图形 F 的周长相等，因此图形 F 的周长大于圆 C 的周长．

上面这个定理除了它本身的重要性外，还有不少有趣的应用．我们先用它给出上节克拉美定理的另一证明：

显然，具有最大面积的 n 边形应该是凸的．

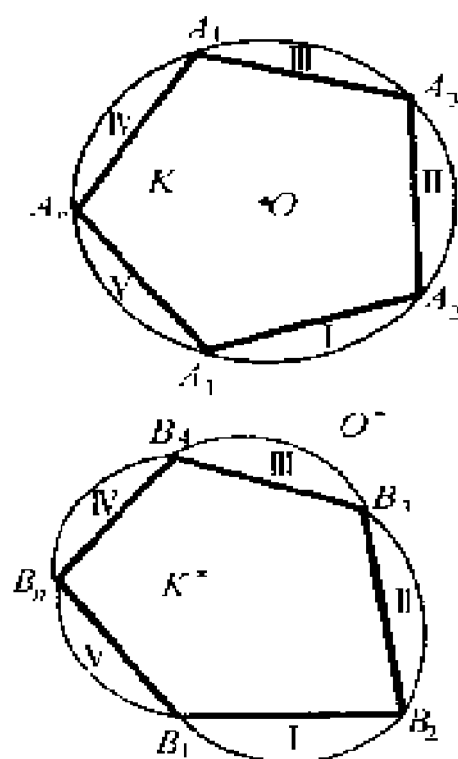


图 38

设 K 是具有给定边长且内接于圆 O 的凸 n 边形，K^* 为具有给定同样边长而不内接于圆的凸 n 边形，只要能证明 $S_K > S_{K^*}$ 就行了（图 38）．今沿 n 边形 K 的 n 条边将弦和圆弧所组成的 n 个弓形一一地剪下来，并按对应边贴补在 n 边形 K^* 的外侧（即图中所示的 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ）．这样贴补起来的图形用 O^* 来记它．显然，O^* 和圆 O 具有相同的周长，但 O^* 不是一个圆（否则 K^* 将内接于圆，与假设不符）．因此按上节所证之定理

即知圆 O 的面积比 O^* 的面积大，由此即得 $S_K > S_{K^*}$.

到此为止，我们得到一系列理论性的结果．也许读者会问：这些定理能不能解决实际问题？现在我们就利用定理 3 来解决两个实际问题．

问题 1 有一长为 l 的篱笆，现在要用来在屋外围出一块菜地，一面可以利用房屋的墙，但篱笆的两端必须靠着墙的边缘．应该采取怎样的围法，方可使菜地的面积最大（图 39）？

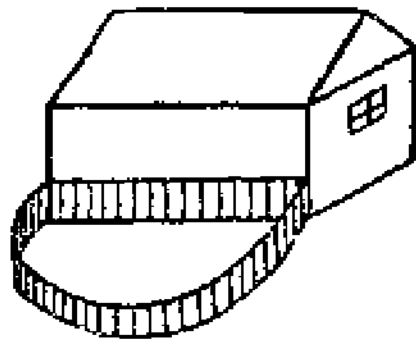


图 39

解 这个问题用数学的语言可叙述如下：长为 l 的曲线 C 与一固定直线段 AB 围出一块面积，但曲线的两端要与固定直线段的两端重合，怎样围法，方能使面积最大？

我们证明：当曲线 C 围成一个圆弧时，面积最大．设围成圆弧形状的曲线 C 与 AB 所成的图形为 K，K^* 是当曲线 C 以任意形状与 AB 所围成的图形．我们只要能证明 $S_K > S_{K^*}$ 就行了．把图形 K 扩充成一个圆，其另一部分记为 G（图 40），扩充后的图形为 Φ．今在图形 K^* 下，如图 40 所示，补上一块与 G 全同的图形，命其扩充后的图形为 Φ^*．显然 Φ 和 Φ^* 具有

相同的周长，但 Φ 是圆，Φ^* 不是圆，故由圆的极值性质知

$$S_{\Phi} > S_{\Phi^*}.$$

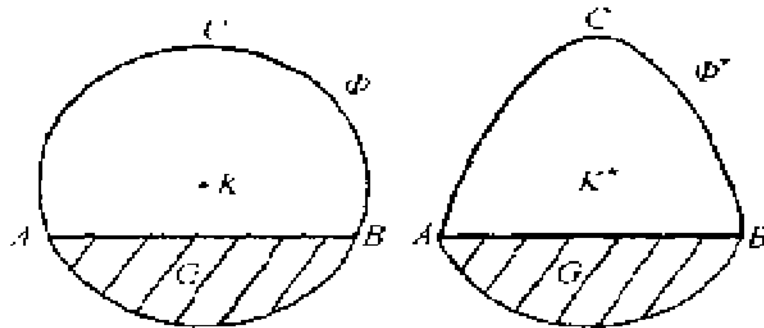


图 40

再在不等式两端都减去 S_G，即得 $S_K > S_{K^*}$.

问题 2 也许读者会问，如果房屋的墙相当长、篱笆的两端不一定要靠着墙的边缘，此时问题如何解法？

这个问题用数学的语言可叙述如下：长为 l 的曲线 C 与长度任意的直线段围住一块面积. 怎样围法，方能使面积最大？

设 K 是长为 l 的曲线与任意直线段围成的半圆；K^* 是长为 l 的曲线与任意直线段围成的任意图形（图 41）. 我们只要证明

$$S_K > S_{K^*}$$

就行了. 把图形 K 和 K^* 按相应的直线段反射到另一侧，分别记为 G 和 G^*，称 K 和 G 联合

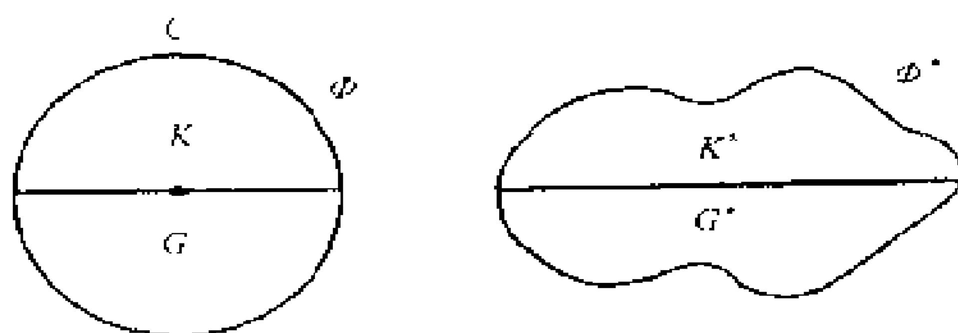


图 41

起来的图形为 Φ^*，K^* 和 G^* 联合起来的图形为 Φ^*，显然这两图形的周长相等. 但 Φ 是圆，而 Φ^* 不是圆. 因此由圆的极值性质知

$$S_\Phi > S_{\Phi^*}.$$

又因

$$S_K = \frac{1}{2}S_\Phi, S_{K^*} = \frac{1}{2}S_{\Phi^*},$$

故知

$$S_K > S_{K^*}.$$

上面这个问题在实际生活中亦常会遇到：例如要用长为 l 的铁丝网靠河岸围成一个鱼池，我们当然希望围出来的鱼池面积越大越好，那么应当怎样围法？现在你应该知道它的答案了吧！

我们将问题 2 用定理形式表述出来.

定理 以任意长度的直线段和另一长为 l

的曲线所围成的一切(凸)图形中,半径为 $\frac{l}{\pi}$ 的半圆具有最大的面积.

问题 2 通常称为纪塔娜问题.在神话里,纪塔娜是非洲卡尔法格纳古城的创始人海枣王的皇后.传说她与居住在非洲北岸的部落商议以后,北岸部落让出"由灰鼠狼皮所能包围住"的一块土地给纪塔娜皇后.但是,纪塔娜皇后不只是用这块小小的灰鼠狼皮去包住一点点泥土.她想出了一个巧妙的办法:先把灰鼠狼皮剪成很细的皮条,再把它们接成一条长带.她用这条长带并利用了海岸线,划出一块比选择远离海岸所能划出的大得多的领土(海岸线近似地看作为直线).

习　　题

1. 试证:一切周长为 l 的封闭曲线所围的面积 S 不超过 $\frac{l^2}{4\pi}$.

2. 面积给定的 n 边形中,以正 n 边形的周界为最短.(提示:参考定理 3*.)

3. 设封闭曲线由长为 a 和 b 的两直线段及长为 l 的曲线组成(图 42).试问:它的面积在什么时候为最大?



图　42

4. 设封闭曲线由长为 a 和 b 的两直线段及长为 l 的曲线组成,而 a、b 两直线段的夹角 θ 是给定了

的(图 43). 试问:它的面积在什么时候为最大?



图 43

5.* 设凸封闭曲线 $\mathscr{L}$ 具有任意方向的对称轴. 试证:封闭曲线 $\mathscr{L}$ 必定是圆.

7 球的极值性质[①]

最后这一节，我们证明一开始提出来的命题：

在一切体积相等的立体中，球体具有最小的表面积．显然，这个命题相当于：

在一切表面积相等的立体中，球体具有最大的体积．

远在阿基米德时代，人们就已经从直观上承认了这一事实，但在数学上给出它的严格证明还是近年来的事．下面介绍的证明虽然从数学的观点看来仍是不够严格的，但较之纯直观的判断已经具有更大的说服力．完全令人满意的严格证明，要用到高等数学中的一些概念和方法，我们不打算在这里介绍了．这里介绍的是施太纳的证明，虽然叙述起来比较烦琐，但却没有涉及任何深奥的东西．为清楚起见，先叙述三

① 阅读这一节有困难的话，可先做一做这一节的习题．

个简单引理，然后导出一个预备定理，最后根据预备定理给出它的证明.

引理 1　通过三角锥$D\text{-}ABC$的底棱AB的中点M及侧棱CD作平面Π(图 44)，则平面Π

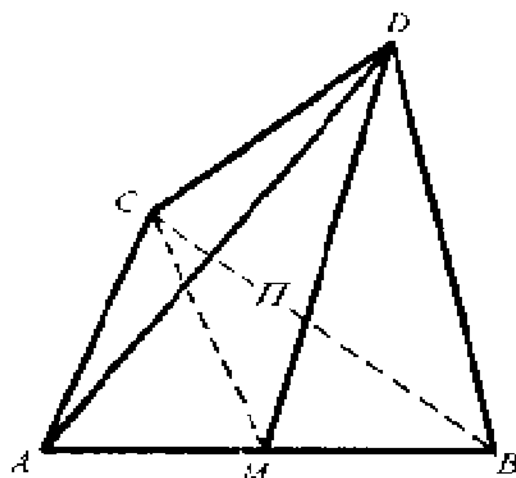


图　44

分三角锥的体积为相等的两部分，且

$$S_{\triangle CDM} < \frac{1}{2}(S_{\triangle CDA} + S_{\triangle CDB}).$$

证明　考察底面$\triangle ABC$，中线CM把它分成面积相等的两个三角形$\triangle AMC$和$\triangle MBC$. 由于三角锥的体积等于底面积乘高的三分之一，因此三角锥$D\text{-}AMC$和$D\text{-}MBC$的体积相等(底面积相等、高底相同).

将$\triangle ACD$和$\triangle BCD$垂直投影于平面Π上，记其投影三角形为$\triangle A_1CD$和$\triangle B_1CD$(图 45). 由于

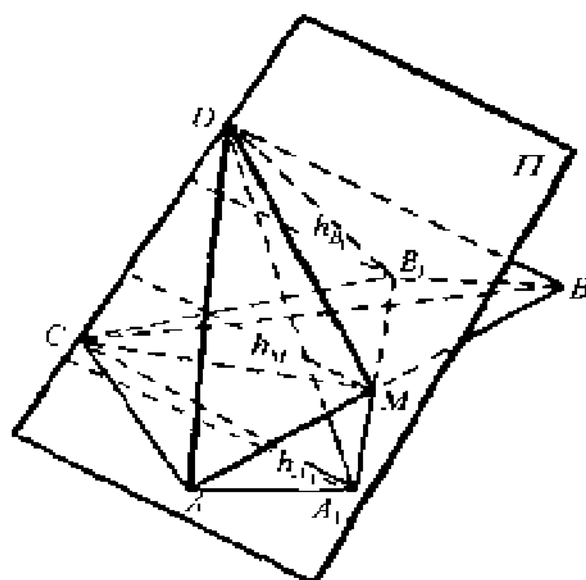


图 45[①]

$$A_1M = MB_1$$

$$(\angle AA_1M = \angle BB_1M = 90^\circ,$$

$$\triangle AA_1M \cong \triangle BB_1M),$$

所以从 M 作 CD 的垂线 h_M 等于从 A_1 和 B_1 向 CD 所作的垂线 h_{A_1} 和 h_{B_1} 的算术平均值，即 $h_M = \frac{1}{2}(h_{A_1} + h_{B_1})$. 因此，

$$S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2}(S_{\triangle A_1CD} + S_{\triangle B_1CD}),$$

① 图 45 的附注：A_1、B_1 是 A、B 两点在平面 Π 上的垂足，点 A_1 和 B_1 不一定在$\triangle ABC$ 上，因为底面三角形 ABC 相对于平面 Π 可能是斜的，即 AB 不是平面 Π 的垂线.

根据投影性质，有

$$S_{\triangle A_1CD} < S_{\triangle ACD}, S_{\triangle B_1CD} < S_{\triangle BCD},$$

代入上式，得

$$S_{\triangle MCD} < \frac{1}{2}(S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}).$$

引理 2　通过四角锥 $D\text{-}ABEF$ 的顶点 D 及底面梯形 $ABEF$ 两平行边 AB、EF 的中点 M 和 K 作平面 Π（图 46），则平面 Π 分四角锥的体积为相等的两部分且

$$S_{\triangle DKM} < \frac{1}{2}(S_{\triangle DFA} + S_{\triangle DEB}).$$

证明　如果底面梯形 $ABEF$ 是一个平行四边形，那么 $AF \parallel KM \parallel EB$ 且 $FA = KM =$

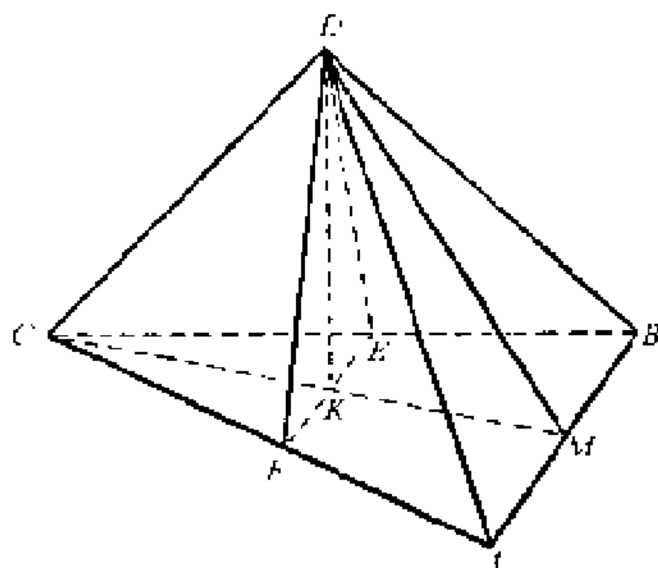


图　16

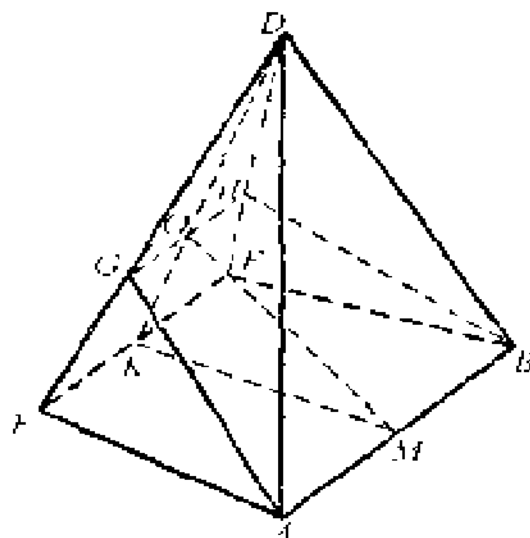


图 47

$AGF\text{-}BHE$ 可以看作四角锥 $D\text{-}ABEF$ 截去四角锥 $D\text{-}ABHG$ 而得. 由于延长 KO 必通过顶点 D, 因此

$$\frac{DF}{GF}=\frac{DK}{OK}=\frac{DE}{HE},$$

进而有

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AGF}}=\frac{S_{\triangle MDK}}{S_{\triangle MOK}}=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BHE}}.$$

再根据引理 2, $\triangle DKM$、$\triangle DOM$ 平分四角锥 $D\text{-}ABEF$、$D\text{-}ABHG$ 的体积, 所以

$$V_{D\text{-}AMKF}=V_{D\text{-}MBEK},V_{D\text{-}AMOG}=V_{D\text{-}MBHO},$$

而且

$$S_{\triangle MDK}<\frac{1}{2}(S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDE}).$$

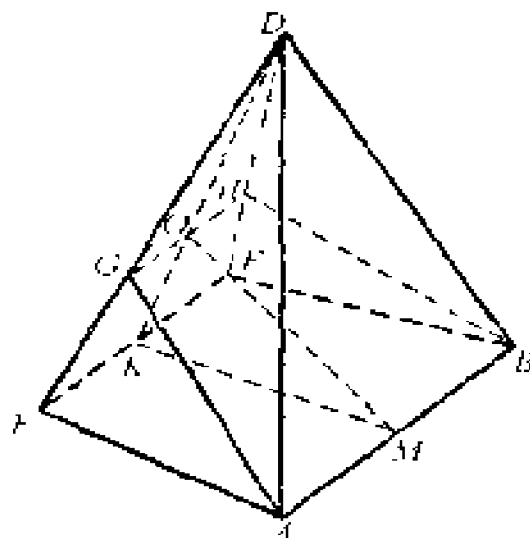


图 47

AGF-BHE 可以看作四角锥 D-$ABEF$ 截去四角锥 D-$ABHG$ 而得. 由于延长 KO 必通过顶点 D, 因此

$$\frac{DF}{GF}=\frac{DK}{OK}=\frac{DE}{HE},$$

进而有

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AGF}}=\frac{S_{\triangle MDK}}{S_{\triangle MOK}}=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BHE}}.$$

再根据引理 2, $\triangle DKM$、$\triangle DOM$ 平分四角锥 D-$ABEF$、D-$ABHG$ 的体积, 所以

$$V_{D\text{-}AMKF}=V_{D\text{-}MBEK},\ V_{D\text{-}AMOG}=V_{D\text{-}MBHO},$$

而且

$$S_{\triangle MDK}<\frac{1}{2}(S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDE}).$$

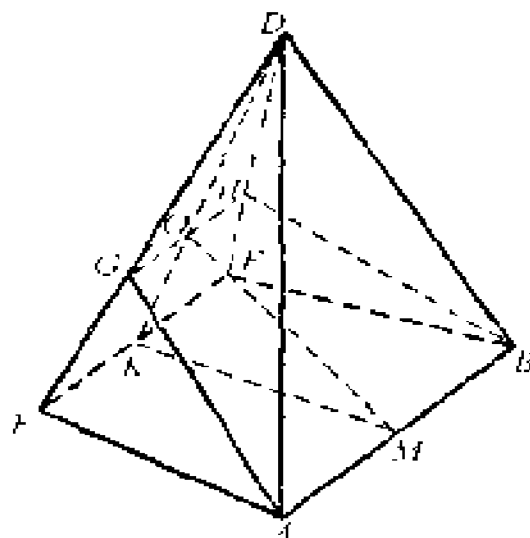


图　47

$AGF\text{-}BHE$ 可以看作四角锥 $D\text{-}ABEF$ 截去四角锥 $D\text{-}ABHG$ 而得. 由于延长 KO 必通过顶点 D,因此

$$\frac{DF}{GF}=\frac{DK}{OK}=\frac{DE}{HE},$$

进而有

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AGF}}=\frac{S_{\triangle MDK}}{S_{\triangle MOK}}=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BHE}}.$$

再根据引理 2, $\triangle DKM$、$\triangle DOM$ 平分四角锥 $D\text{-}ABEF$、$D\text{-}ABHG$ 的体积,所以

$$V_{D\text{-}AMKF}=V_{D\text{-}MBEK},\ V_{D\text{-}AMOG}=V_{D\text{-}MBHO},$$

而且

$$S_{\triangle MDK}<\frac{1}{2}(S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDE}).$$

再仿照引理 2 的证明，即得所需的结果.

当梯形 $FEHG$ 是平行四边形时，它的证明留给读者作为练习.

预备定理 设某给定方向的直线 l 与立体 P 的表面只相交于两点 R、Q，记线段 RQ 的中点为 M. 当直线 l 在立体中平行移动时，中点 M 的轨迹组成曲面 Γ，则曲面 Γ 平分立体的体积且曲面 Γ 的面积小于立体表面积的二分之一(图 48).

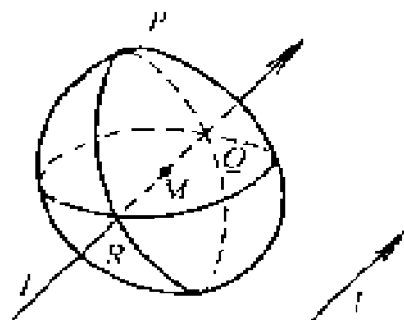


图 48

为了说明这个事实，我们用平行于直线 l 的平面 Π_1、Π_2、$\cdots\Pi_n$ 将立体剖分成许多很小很小的三棱柱. 当三棱柱愈来愈细时，可以将上下底近似地看作三角形，根据引理 3 首先可以断定曲面 Γ 的面积不会大于立体表面积的 $\frac{1}{2}$. 另一方面，如果曲面 Γ 的面积真的等于立体表面积的 $\frac{1}{2}$ 的话，那么 Γ 两侧 P 上的曲面就会贴合而为一(即能重叠起来). 因此可以进一步断定 Γ 的面积确实严格地小于立体 P 的表面积的 $\frac{1}{2}$. 至于立体的体积被平分是显而易见的事. 这一事实在下文中起着重要的作用.

定理 4 在一切表面积相等的立体中，球体具有最大的体积.

证明 因为表面向里凹的立体不可能具有最大的体积，我们只须在凸立体中进行比较.

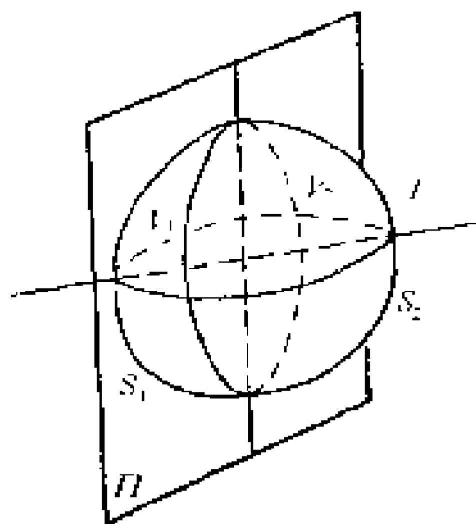


图 49

设 Ψ 是具有最大体积的凸立体. 我们选定任意方向的直线 l，再作垂直于 l 的平面 Π，将平面 Π 从立体 Ψ 的一端想像地穿过立体平行移动到另一端(图 49). 在移动过程中，一定存在这么一个时刻使得平面 Π 恰好将凸立体 Ψ 的表面积 S 分成相等的两部分 S_1(左)和 S_2(右)，即

$$表面积\ S_1 = 表面积\ S_2$$

$$= \frac{1}{2}\Psi\ 的表面积 S.$$

首先，我们证明平面 Π 必同时将立体 Ψ 分成体积相等的两部分 V_1(左)和 V_2(右). 假如体积 $V_1 < V_2$，那么以关于平面 Π 和 S_2 对称的曲面 S_1^* 替代 S_1(S_1^* 是由曲面 S_2 关于平面 Π 反射而得的对称于 S_2 的曲面，见剖面图 50). 此时，曲面 S_1^* 和 S_2 所围成的立体具有大

于 Ψ 的体积，即 $V_2 + V_2 > V_1 + V_2 = V_\Psi$，但却和凸立体 Ψ 具有相等的表面积，这和 Ψ 具有最大体积的假设矛盾. 因此，$V_1 = V_2$.

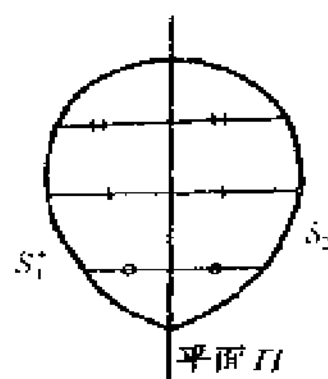


图 50

其次，我们证明曲面 S_1 和 S_2 关于平面 Π 是对称的.

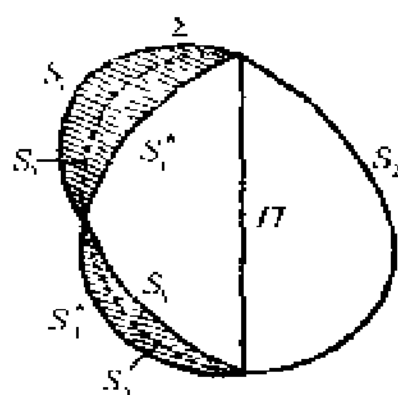


图 51

假如 S_1 和 S_2 不对称(见剖面图 51)，作关于平面 Π 和 S_2 对称的曲面 S_1^*，由于曲面 S_1^x 和曲面 S_1 具有共同的边界线，因此 S_1 和 S_1^* 合起来组成封闭曲面 Σ. 由于 S_1 不可能完全包含在 S_1^* 的内部，S_1^* 也不可能完全包含在 S_1 的内部，因为两者和平面 Π 围住相等的体积，所以封闭曲面 Σ 是自身相交的，于是封闭曲面 Σ 可以剖分成一个毗连一个而不自身相交的封闭曲面 Σ_1，Σ_2，$\cdots$，Σ_m.

设任意选定的直线 l 与封闭曲面 Σ 相交于 R、Q 两点，记线段 RQ 的中点为 M. 当直线 l 在封闭曲面 Σ 中平行移动时，中点 M 的轨迹组成曲面 S_3(图 51). 对每一个不自身相交的封闭曲面 Σ_1，Σ_2，$\cdots$，Σ_m，分别使用预备定理得

知：

$$表面积\ S_3 < \frac{1}{2}(表面积\ S_1^* + 表面积\ S_2)$$
$$= 表面积\ S_2,$$

且 S_1、S_1^*、S_3 三者和平面 Π 所围成的体积都相等.这样一来，曲面 S_3 和 S_2 所围成的立体和 Ψ 具有相等的体积，但曲面 S_3 和 S_2 合并起来的面积比 Ψ 的表面积还来得小.如果我们将 S_3 和 S_2 所围成的封闭曲面向外扩张，使它和 Ψ 具有相同大小的表面积，那么它将比立体 Ψ 具有更大的体积.但我们假设 Ψ 是具有最大体积的凸立体，因此这是不可能的.这就说明了曲面 S_1 和 S_2 关于平面 Π 是对称的，换句话说，Π 是 Ψ 的对称平面.由于直线 l 的方向是任意选定的，故知立体 Ψ 具有任给方向的对称平面.

显然，球体具有任意方向的对称平面.

最后，我们证明具有任意方向对称平面的立体一定是球体.

我们知道，任何物体都有一个而只有一个重心.几何立体可以看作均匀物质所构成的物体.显然，均质物体的对称平面应当通过它的重心.这就说明了几何立体的一切对称平面必相交于一点.设具有最大体积的凸立体 Ψ 的一

切对称平面相交于定点 O，在 Ψ 的表面上取定一点 A，再在其上任取一点 B，连 OA、OB、AB，记 AB 的中点为 C，引垂直于 AB 的对称平面 Π，它通过定点 O 且平分 AB 于点 C（图 52）. 由于 $OC \perp AB$，$AC = CB$，所以 $\triangle OCA \cong \triangle OCB$，故得 $OB = OA$. 由于点 B 是 Ψ 表面上任意选取的. 所以 Ψ 表面上任一点到定点 O 的距离都等于定值 OA，故知 Ψ 是一个球体.

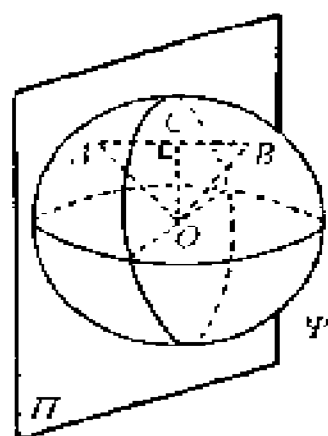


图 52

习 题

1. 设 AM 为 $\triangle ABC$ 的中线（图 53），试证：

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}, AM < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

2. 设 MN 为梯形 $ABCD$ 平行边中点的连线（图 54），试证：

$$S_{AMND} = S_{MBCN}, MN \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC).$$

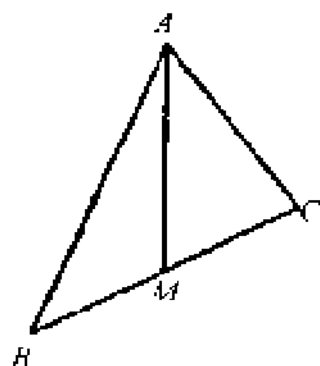


图 53

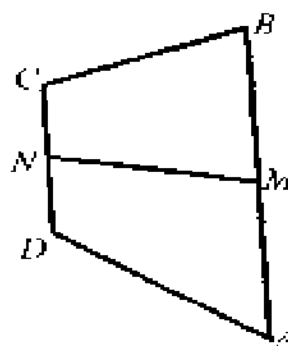


图 54

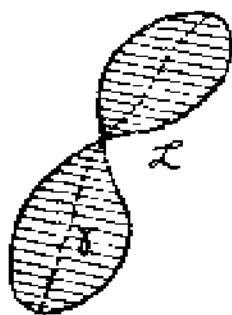


图 55

3．设 $\mathscr{S}$ 是一条自身相交的封闭曲线，一切被 $\mathscr{S}$ 截断的平行直线段的中点组成曲线 r．试证：r 分曲线 $\mathscr{S}$ 的面积为相等的两部分（左边的等于右边的，图 55）．

4．如图 56 所示，设 $S_{ABC_1C_2}=S_{ABD_1D_2}$，$S_{AC_2FE_2}=S_{AE_2FD_2}$，$S_{FD_1BE_1}=S_{FE_1BC_1}$．试证：

$$S_{ABE_1E_2}=S_{ABC_1C_2}(=S_{ABD_1D_2}).$$

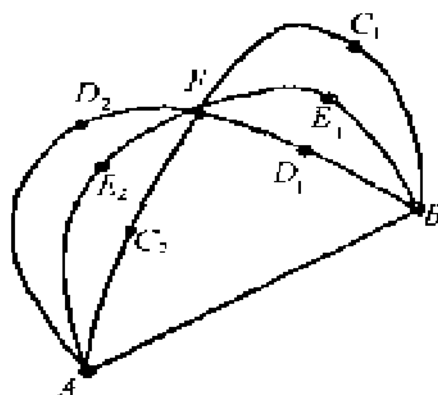


图 56

5．设四角锥 $D\text{-}ABEF$ 以平行四边形 $ABEF$ 为底面，现通过底面两平行边的中点 M、K 及其顶点 D 作平面 Π（图 57），试证：

$$V_{D\text{-}AMKF}=V_{D\text{-}MBEK},$$

且

$$S_{\triangle DKM}<\frac{1}{2}(S_{\triangle DFA}-S_{\triangle DEB}).$$

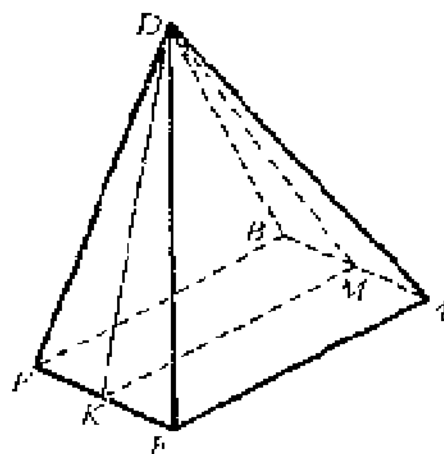


图 57

6. 设 M、O、K 为三棱柱 AGF-BHE 三平行棱 AB、GH、FE 的中点，且 $GH = FE$（图 58），试证：

$$V_{AGF\text{-}MOK} = V_{MOK\text{-}BHE},$$

且

$$S_{\triangle MOK} \leqslant \frac{1}{2}(S_{\triangle AGF} + S_{\triangle BHE}).$$

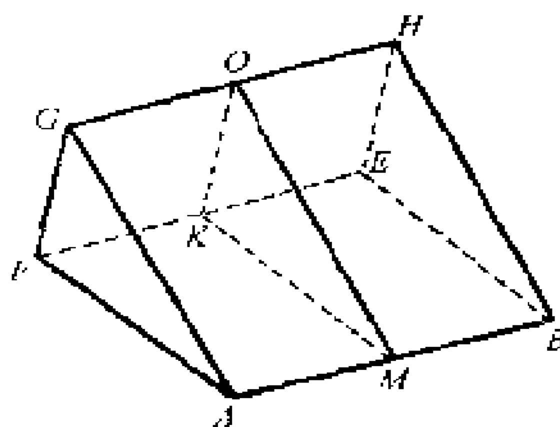


图 58

7. 已知，在一切表面积相等的立体中，球体具有最大的体积. 试证：在一切体积相等的立体中，球体具有最小的表面积.

附录　习题解答或提示

2

1. 提示：i)平行四边形的对角线相互平分；ii)菱形的对角线相互平分且垂直；iii)利用引理1.

2. 引平行四边形的对角线，将它看作两个全等的三角形. 此时，三角形有两条边长是给定的，故当它们相互垂直时面积为最大.

3. 引矩形的对角线，将看作两个全等的三角形. 由于矩形的对角线是圆的直径，因此等于定长，故根据引理 2*，当顶点在半圆周的中点时三角形的面积最大. 将这样的两个三角形合并起来恰好是一个特殊的矩形——正方形. 由于内部的面积达到最大，因此锯去的废料就最少.

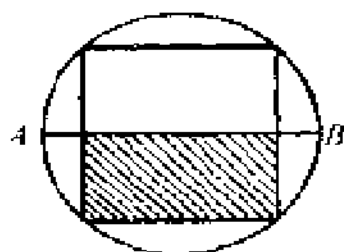


图　59

4. 提示：i)矩形的一边一定和半圆周的直径 AB 相重合；ii)补上另一半圆周，及关

于直径 AB 对称于矩形的另一矩形(图 59);iii)利用上一题的结果.

5. 当$\triangle ABC$ 成为正三角形时面积最大.

6. 设 $DC < AB$,引 $CA' \parallel DA$,交 AB 于 A'点(图 60).由于上下底及周长是给定的,因此$\triangle A'BC$ 的底边 $A'B$ 及两侧边之和是给定的.根据引理 3,当$\triangle A'BC$是等腰三角形时具有最大的面积.由于 $A'B$ 是给定的,因此$\triangle A'BC$具有最大的高,从而梯形也就具有最大的高.

7. 提示:i)三角形的高是确定的;ii)两点间以直线段为最短(图 61).

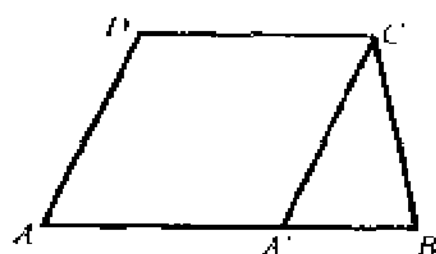


图 60

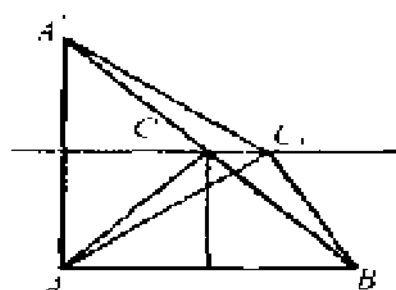


图 61

8*. 提示:i)将满足条件的两三角形 ABC 和 ABC' 的底边 AB 彼此重合,且使其顶点位于同一侧(图 62).

ii)由于两三角形都

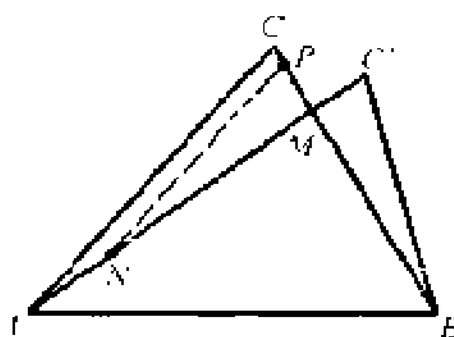


图 62

不是等腰的,且不是全等的,不妨设

$$AC > BC, AC' > BC',$$

$$AC - BC < AC' - BC'.$$

根据 $AC + BC = AC' + BC' = l$,得知 $AC - (l - AC) < AC' - (l - AC')$

$$AC < AC' \quad 及 \quad BC > BC'.$$

因此两三角形的相互位置必如图 62 所示:AC' 和 BC 相交于点 M.

iii)由于 $AC > BC$,所以$\angle CBA > \angle CAB$,因此$\angle MBA > \angle MAB$,从而有 $AM > MB$.故可在线段 AM 上取定一点 N,而使 $NM = MB$,再在直线 MC 上取一点 P,而使 $MP = MC'$,$\triangle NMP \cong \triangle BMC'$.

iv)仿照引理 3 证明 P 点落在线段 MC 的内部,因此

$$S_{\triangle BMC'} < S_{\triangle AMC},$$

从而有

$$S_{\triangle ABC'} < S_{\triangle ABC}.$$

3

1. 提示:i)以长度任意的直角边 AC 为对称轴,作$\triangle ABC$ 的对称$\triangle ADC$(图 63).

ii) $\triangle BCD$ 的周长是给定的，周长给定的三角形中以正三角形的面积为最大.

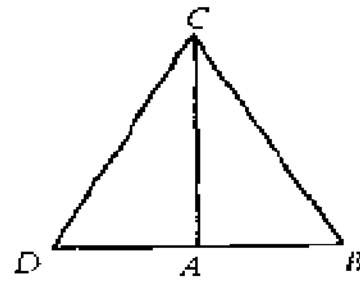


图 63

2. 设 $ABCD$ 为周长一定的正方形；$AB'C'D'$ 为周长相同的矩形，AB' 的一段和 AB 重合且 $AB' > B'C'$，$B'C = D'E'$（图 64）. 显然

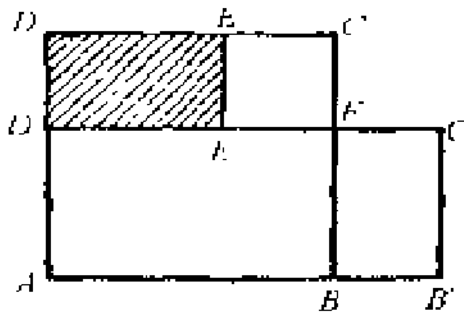


图 64

$$AB' > \frac{AB' + B'C'}{2}$$

$$= AB = BC > B'C',$$

$$BB' = EE',$$

$$S_{EB'C'F} = S_{DD'E'E},$$

因此

$$S_{ABCD} > S_{AB'C'D'}.$$

3. 提示：i) 利用上一题的结果；ii) 将矩形和正方形的面积分别乘上给定角 α 的正弦（图 65）.

4. 圆外切平行四边形是菱形.

5. 设给定角 $\angle ABC = \alpha$，两侧边之和 $AB + BC = l$. 作 $AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，$CD \mathrel{\underline{\parallel}} BA$，则 $\triangle ADC \cong \triangle ABC$，且四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形

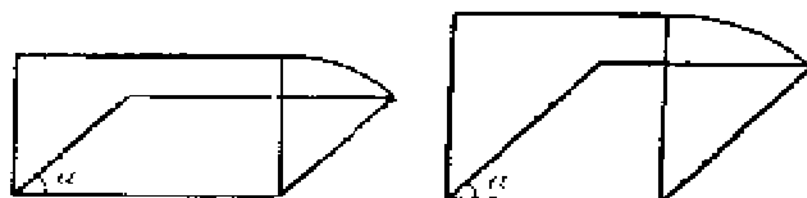


图 65

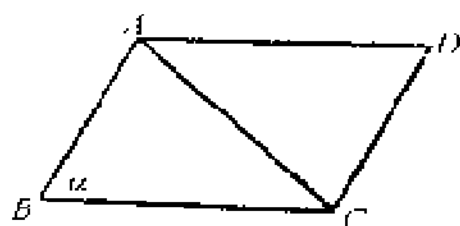


图 66

(图 66). 它具有给定的顶角 α 及周长 $2l$. 根据上题的结果，当 $AB = BC = \frac{1}{2}l$ 时，平行四边形 $ABCD$ 具有最大的面积. 由于 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$，因此 $\triangle ABC$ 也具有最大的面积.

6. 提示：对任何内接于圆的四边形 $ABCD$ (图 67)来说，两对角线的乘积总是等于两组对边乘积之和，即 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

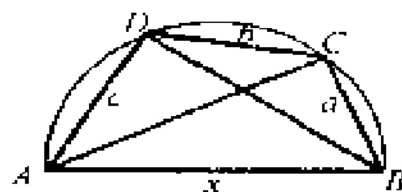


图 67

详解如下：不失一般性，设 $BC = a$，$CD = b$，$DA = c$，$AB = x$(图 67)，则

$$AC = \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$BD = \sqrt{x^2 - c^2}\text{(因为}\angle BCA = \angle BDA = d\text{)}.$$

由于 $\square ABCD$ 内接于圆，所以

$$\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - c^2} = ac + bx,$$

两边平方,以 x 除之得

$$x^3-(a^2+c^2)x=b^2x+2abc,$$

即

$$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0.$$

根据代数知识,三次方程有而只有三个根,设为 α、β、γ,则方程

$$\begin{aligned}&x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc\\&\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&\equiv x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\\&\quad\beta\gamma)x-\alpha\cdot\beta\cdot\gamma.\end{aligned}$$

比较对应项的系数得知

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\alpha\beta\gamma=2abc>0.$$

由此推出:

i)若 α、β、γ 三个都是实根,则必有而且只有一个根是正的;

ii)若存在两个复根 $\alpha=\xi+i\eta,\beta=\xi-i\eta$,由于 $(\xi+i\eta)(\xi-i\eta)\gamma=(\xi^2+\eta^2)\cdot\gamma=2abc>0$,得知 γ 一定是一个正根①.

---

① 根据三次方程的解法,可以进一步肯定复根是不存在的.

因此，长度 x 被给定的边长 a、b、c 所惟一确定.

4

1．根据定理 1 得知边长一定的平行四边形中，以圆内接平行四边形的面积最大；但第二节习题 2 告诉我们，边长一定的平行四边形以矩形的面积最大．因此，圆内接平行四边形一定是矩形．

2．内接于圆的四边形面积

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\left(\text{其中 } p=\frac{a+b+c+d}{2}\right).$$

而外切于圆的四边形两对边之和相等，即

$$a+c=b+d=p.$$

因此，$p-a=c$、$p-b=d$、$p-c=a$、$p-d=b$，代入面积公式得知

$$S=\sqrt{abcd}.$$

3．提示：i）设给定周长为 $2p$，将它任意分为四正数（四段）a、b、c、d，以 a、b、c、d 为边长的一切四边形中，以内接于圆的面积最大．因此，只须考虑周长为 $2p$ 且内接于圆的四边形中哪一个的面积最大．

ⅱ)根据面积公式

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(ab+cd)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2},$$

得知当 $a^2+b^2-c^2-d^2=0$ 即 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 时，内接于圆的四边形面积具有较大的数值. 由于 a、b、c、d 允许任意轮换，故必同时有

$$b^2+c^2=d^2+a^2,$$

与上式相加得知

$$a^2+c^2+2b^2=a^2+c^2+2d^2 \text{ 或 } b=d.$$

同理得知 $a=c$，此时 $S=\frac{1}{2}(ab+cd)=ab$，且 $a+b=p$ 为给定值.

ⅲ)周长一定的矩形中以正方形面积为最大.

4. 设给定的四正数为 α、β、γ、δ[①]，令

$$2a=\beta+\gamma+\delta-\alpha;2b=\gamma+\delta+\alpha-\beta;$$

$$2c=\delta+\alpha+\beta-\gamma;2d=\alpha+\beta+\gamma-\delta.$$

显然

$$a+b+c+d=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

---

① 这里的证明仅适用于任三正数之和大于另一数的场合.

若记它为 $2p$，则

$$\alpha = p - a, \beta = p - b,$$

$$\gamma = p - c, \delta = p - d.$$

由于边长为 $p-a$、$p-b$、$p-c$、$p-d$ 且内接于圆的四边形的面积 S 小于周长为 $2p$ 的正方形的面积 S_0，得知

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \leqslant \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$= \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}\right]^2,$$

$$\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\leqslant \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}$$

或

$$\sqrt[4]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta} \leqslant \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4}.$$

5. 提示：将图 22 中的圆沿通过四边形顶点的四条半径剪开，然后按对应边的次序重列其相互位置.

6*. 提示：i) 分析　设四边形 $ABCD$ 具有最大的面积，则其对角一定互补，即

$$\angle BAD + \angle BCD = 180°;$$

基础上,作出具有最大面积的四边形 $ABCD$ 是容易办到的.

5

1. 提示:设法证明圆半径或圆周长度是惟一的.因为当半径增大时,圆周的长度增大而定长的弦在增大了的圆周上却对应于更小的弧度.

2. 参考第四节习题 5 的提示.

3. 仿照第三节问题 1 或问题 2 的证明.

4. 提示:i)当边长给定的 n 边形的面积达到最大值时,连结该 n 边形的任四顶点而成的四边形必内接于圆.

ii)一个 n 边形,如果连结任四顶点而成的四边形都内接于圆,则该 n 边形一定内接于圆.

5. 设$\triangle A'B'C$ 及$\triangle ABC$ 满足所给条件而

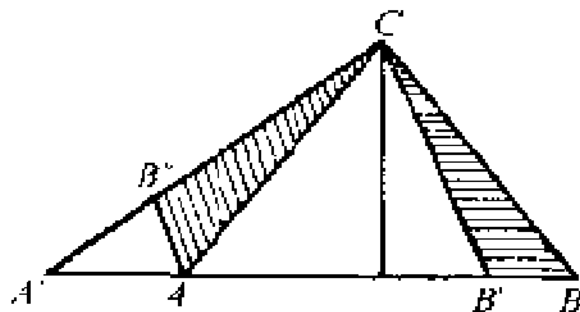


图 69

$\triangle ABC$ 为等腰三角形(图 69).由于

$$AC = BC, \quad A'C > B'C,$$

基础上，作出具有最大面积的四边形 $ABCD$ 是容易办到的.

5

1. 提示：设法证明圆半径或圆周长度是惟一的. 因为当半径增大时，圆周的长度增大而定长的弦在增大了的圆周上却对应于更小的弧度.

2. 参考第四节习题 5 的提示.

3. 仿照第三节问题 1 或问题 2 的证明.

4. 提示：i) 当边长给定的 n 边形的面积达到最大值时，连结该 n 边形的任四顶点而成的四边形必内接于圆.

ii) 一个 n 边形，如果连结任四顶点而成的四边形都内接于圆，则该 n 边形一定内接于圆.

5. 设$\triangle A'B'C$ 及$\triangle ABC$ 满足所给条件而

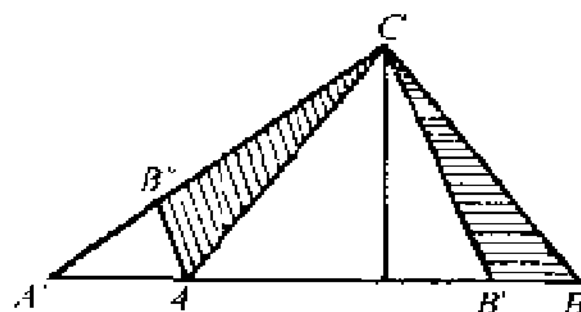


图 69

$\triangle ABC$ 为等腰三角形(图 69). 由于

$$AC = BC, \quad A'C > B'C,$$

基础上，作出具有最大面积的四边形 $ABCD$ 是容易办到的.

5

1. 提示：设法证明圆半径或圆周长度是惟一的. 因为当半径增大时，圆周的长度增大而定长的弦在增大了的圆周上却对应于更小的弧度.

2. 参考第四节习题 5 的提示.

3. 仿照第三节问题 1 或问题 2 的证明.

4. 提示：i) 当边长给定的 n 边形的面积达到最大值时，连结该 n 边形的任四顶点而成的四边形必内接于圆.

ii) 一个 n 边形，如果连结任四顶点而成的四边形都内接于圆，则该 n 边形一定内接于圆.

5. 设 $\triangle A'B'C$ 及 $\triangle ABC$ 满足所给条件而

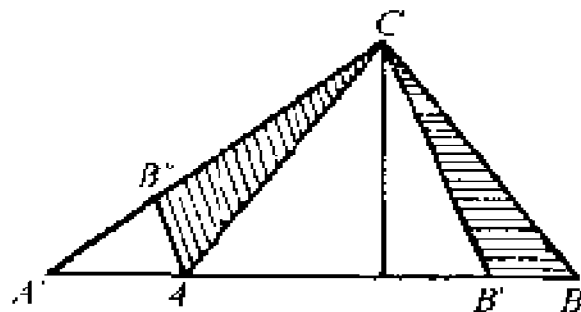


图 69

$\triangle ABC$ 为等腰三角形(图 69). 由于

$$AC = BC, \quad A'C > B'C,$$

$$\angle A'CA = \angle B'CB,$$

故可在 $A'C$ 上取定一点 B''，而使 $\triangle AB''C \cong \triangle BB'C$. 因此

$$S_{\triangle BB'C} = S_{\triangle AB''C} < S_{\triangle AA'C},$$

从而有 $S_{\triangle BAC} < S_{\triangle B'A'C}$. 证毕.

6. 提示：i) 四边形 $PAOB$ 的面积是定值（图 29）；

ii) 由于 $\triangle OBR \cong \triangle OCR$，$\triangle OAQ \cong \triangle OCQ$，因此

$$S_{AOBRQ} = 2S_{\triangle ORQ};$$

iii) 五边形 $AOBRQ$ 的面积最小时，三角形 PQR 的面积达到最大；

iv) 三角形 QOR 的顶角 $\angle QOR$ 及高度 OC 是一定的，因此，当 $OQ = OR$ 时，$\triangle QOR$ 的面积最小. 此时 $RC = CQ (= QA = RB)$，C 点位于 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

7. 提示：由上题可知，当 $AQ = QC = CR = RB$ 时，五边形 $AOBRQ$ 的面积为最小.

8. 提示：i) 外切于定圆的 n 边形的面积等于该 n 边形的周长乘上定圆半径的二分之一；

ii) 利用上一题的结果.

6

1. 提示：i) 周长为 l 的所有封闭曲线中，圆

周所围的面积为最大. ii)圆周长 $l=2\pi R$,圆面积 $S=\pi R^2$.

2. 设 P、Q 为面积相等的 n 边形,且仅 P 为正 n 边形. 作正 n 边形 R 使其周长和 n 边形 Q 的周长相等(图 70). 由定理 2 得知正 n 边形 R 比 n 边形 Q 具有更大的面积,而 Q 和 P 的面积是相等的,因此正 n 边形 R 比正 n 边形 P 具有更大的面积. 由此推出正 n 边形 R 比正 n 边形 P 具有更大的周长,而 Q 和 R 的周长是相等的,因此 Q 比 P 具有更大的周长. 这就是说面积一定的 n 边形中,正 n 边形 P 的周长最短.

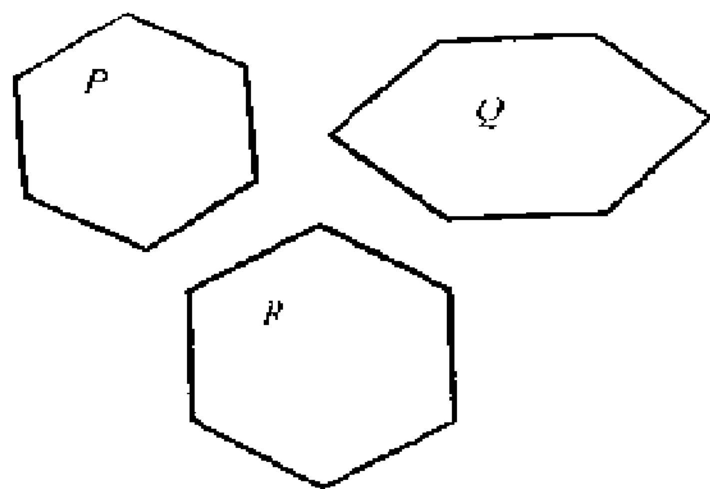


图 70

3. 提示:当柔软曲线成为圆周的一部分且两直线段的接头处也落在该圆周上时,封闭曲线所围的面积为最大(图 71). 证明方法与 35 页问题 1 相同.

4. 设两直线段为 AB、AC,由于它们的夹

角 $\theta=\angle BAC$ 是给定的，因此 $\angle A$ 的对边 BC 具有定长．由 35 页问题 1 得知当柔软曲线段成为圆周的一部分时，它的面积为最大（图 72）．

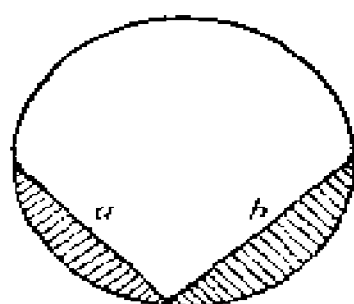


图 71

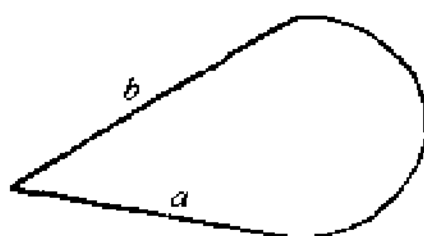


图 72

5．提示：凸封闭曲线 $\mathscr{L}$ 的一切对称轴都相交于一点．

设 l、m 为两条相互垂直的对称轴，记其交点为 O，在封闭曲线 $\mathscr{L}$ 上任取一点 A，连 AO，再延长 AO 交封闭曲线 $\mathscr{L}$ 于 B 点（图 73），我们证明

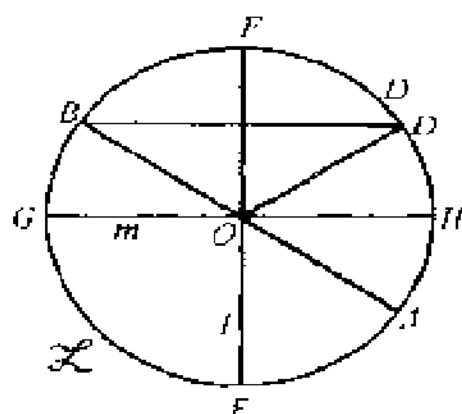


图 73

$$AO=OB,$$

即 O 为 AB 的中点．

设对称轴 l、m 分别交封闭曲线 $\mathscr{L}$ 于 E、F 及 G、H（图 73）．在 $\mathscr{L}$ 上取定 B 关于对称轴 l 的对称点 D，显然 $OB=OD$，$\angle BOG=\angle DOH$；再在 $\mathscr{L}$ 上取定 A 关于对称轴 m 的对称点 D'，显然 $OA=OD'$，$\angle AOH=\angle D'OH$．由于 $\angle AOH=\angle BOG$，因此 $\angle D'OH$

$=\angle DOH$，故知 D 和 D' 在 O 点发出的同一条射线上，但由于封闭曲线 γ 是凸的，因此从 O 点发出的射线同 γ 只能相交于一点，D 和 D' 一定相重，故得

$$OD = OD',$$

从而有

$$OA = OB.$$

这样一来，垂直于 AB 方向的对称轴一定要通过 O 点．由于 AB 是任意选取的，因此封闭曲线 γ 的一切对称轴都相交于一点．

7

1．提示：i）延长 AM 使 $MN = AM$，连 BN、CN，四边形 $ABND$ 是一个平行四边形；

ii）三角形两边之和大于第三边；

iii）三角形面积等于底乘高的1/2．

2．利用上一题的结果．

3．提示：将曲线所围成的图形剖分成一系列上下底相互平行的曲边梯形（两侧边由 γ 上的曲线段组成），近似地将曲边梯形视为普通梯形，再利用第 2 题的结果．

4．只需用加法运算．

5．提示：i）四角锥的体积等于底乘高的1/3；ii）利用第 1 题的结果．

6. 提示：分 3 种情况加以证明：

i) $AB = GH$ ($= FE$); ii) $AB > GH$（利用第七节引理 1）; iii) $AB < GH$（利用第七节引理 2）.

7. 仿照"面积一定的所有平面图形中，圆的周界最短"这一定理的证明，或第 6 节习题 2 的证明.

后　　记

北京市 1978 年中学生数学竞赛第二试的最后一题是这样的:“设有一直角 QOP,试在 OP 边上求一点 A,在 OQ 边上求一点 B,在直角内求一点 C,使 $BC+CA$ 等于定长 L,且使四边形 $ACBO$ 的面积最大.”2000 多名优秀选手中的绝大部分没有做出来,只有胡波一人答对了. 它可能是这次竞赛最难的一题. 听过“等周问题”演讲的一些同学也没有做出来. 说明目前中学生的学习方法与学习深度还有一些问题. 为便于中学生学习,将这小册子的主要精神介绍一下.

念完全书,在结论上,即定理内容上应该有这么一个印象:达到极值的几何图形往往都具有对称性. 比如:内接同一圆周的所有 n 边形中,正 n 边形的面积最大;周长为给定值的一切 n 边形中,正 n 边形的面积最大;周长一定的所有封闭平面曲线中,圆周所围的面积最大. 正 n 边形是对称性很强的几何图形. 至于圆周

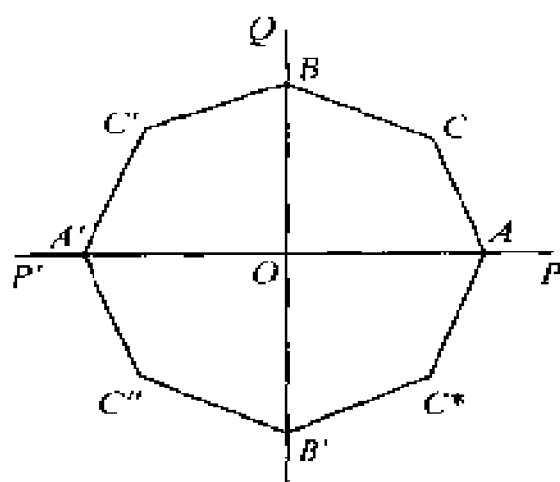
那是对称性最强的几何图形．通过圆心的任何直线都是它的对称轴，圆心是它的对称中心．深思一下可以发现："达到极值的几何图形往往都具有对称性"在第2节的引理2和引理3中就已显示出来．

根据第2节的引理2和引理3，上述竞赛试题是容易直接求解的（请对照《北京科技报》（1978年）第五期或《北京日报》1978年5月8日的竞赛题解）．

念完全书，在方法上即解题技巧上应该有这么一个印象：这本册子一直在使用反射法——求作关于直线或平面的对称点或对称图形的方法．在第2节引理3的简单证明中"作B关于直线l的对称点B'"，在第5节定理2的证明中，特别在圆和球的极值性质这两节中，都使用着反射法．这种反射法在求解某些几何问题和其他极值问题时，也很有用处．在物理的光学和电磁学里也很有用处，物理学家们称它为镜像法．

如果读者熟悉反射法且记得"周长给定的n边形中，正n边形的面积最大"，上述竞赛试题一下子就解决了．因为将直角QOP以OQ为对称轴反射过去成为QOP'，再将图形以$P'P$为对称轴反射下来，四边形$ACBO$就反射成八边形$ACBC'A'C''B'C^{\times}$（见下页图）．周长给定

为 $4L$ 的八边形中，以边长为$\frac{L}{2}$的正八边形的面积最大．正八边形在第一象限的三个顶点 A、C、B 就是所求的解．



话得说回来，1965 年冬有过这么回事：某公社要铺设小水渠，每段用三块同样宽度 l 的长方形水泥板拼成水槽，一块在底面，两块在水渠的侧面．当侧面两块水泥板都和底面垂直时，水渠横截面的面积为 l^2．当侧边两块水泥板张开时，横截面的面积将增大，到一定程度后将减少．当两个内角都张到 180°时，横截面的面积为零．横截面面积直接反映水渠水容量的大小，公社急需知道，内角多少度时，横截面面积达到最大．一位社教工作队的同志返回原单位，用微积分的办法，选取两个内角 θ 与 φ 作为参数，花了两个晚上证明出当两个内角都是 120°时，水容量最大．其实，只要将横截面按开口线反射一下，就成为周长给定的六边形，什么时候面积最大？正六边形．或者边长给定的六边形什么时候面积最大？内接于圆．最后结论都是内角等于 120°．这位同志是有水平、有能力的，问题是他对"等周"不熟，关键在于要熟，要熟练，俗语说：熟能

生巧.

为什么提倡熟练？因为熟练包含了牢固与灵活.

复旦大学名誉校长、我学习黎曼几何时的老师苏步青院士告诉我，数学对某一个人来说没有难与不难之分，只有熟与不熟之分，深入这个数学分支，熟悉了也就不难了. 要熟就要下苦功. 念完本书，进入大学后，可念念苏老的专著《微分几何五讲》，该书第一讲的第一节就是讲述“等周问题”. 那里是用高等数学方法证明的.

蔡 宗 熹

2001 年劳动节于北京学院

路 31 号原地矿部计算中心